« Généalogie fonctionnelle »

On dérive $F \rightarrow f$ — On dérive $f \rightarrow f'$ — On dérive $f' \rightarrow f''$

On intègre $f'' \rightarrow f'$ — On intègre $f' \rightarrow f$ — On intègre $f \rightarrow F$

F

Point méthode

Pour vérifier que F est une **primitive** de f sur I, on montre que

$$F'(x) = f(x)$$

Exemple : Montrer que F telle que $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de ln sur $]0\,;+\infty[$

une primitive de f sur I

⚠ Deux primitives F et G d'une fonction f diffèrent d'une constante c réelle.

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad F(x) = G(x) + c$$

Graphiquement, on passe de $\mathscr{C}_G$ à $\mathscr{C}_F$ par une translation de vecteur $c\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$

f

Point méthode

Le signe de f' sur I induit les **variations** de f sur I.

Soit f une fonction deux fois dérivables à dérivées continues sur I

En physique, f est associée à l'équation horaire $x(t)$ (position).

f'

Point méthode

Le signe de f'' sut I induit les variations de f' sur I ainsi que la **convexité** de f sur cette intervalle.

Soit f' **la** fonction dérivée première de la fonction f sur I.

En physique, f' est associée à la vitesse $v(t)$.

f''

Soit f'' **la** fonction dérivée seconde de la fonction f sur I.

En physique, f'' est associée à l'accélération $a(t)$.

Une application

Soit f la fonction deux fois dérivables, à dérivées continue sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x\cos 2x$$

On peut facilement vérifier que, $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f(x)} = \boxed{-\sin 2x} - \boxed{\frac{1}{4}f''(x)}$

en effet : $f'(x) = \cos 2x - 2x\sin 2x \quad \Rightarrow$

$f''(x) = -2\sin 2x - 2\sin 2x - 4x\cos 2x = -4\sin 2x - 4f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 4f(x) = -4\sin 2x - f''(x)$

Cette relation fonctionnelle permet d'atteindre l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{F(x)} = \boxed{\frac{1}{2}\cos 2x} - \boxed{\frac{1}{4}f'(x)} + c \quad$ avec $c \in \mathbb{R}$

Culture : On dit que la fonction f est une solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$y + \frac{1}{4}y'' = -\sin 2x \quad \text{où } y \ : \ x \mapsto y(x)$$