Correction de **FONCTIONS - Fiche 5**

① **1.** Ce n'est pas un calcul de primitive puisqu'on vous donne la primitive candidate et qu'il suffit de vérifier qu'elle l'est.
En plus, nous ne pourrions pas trouver une primitive grâce à nos fonctions et formes usuelles…
Il suffit de dériver g et trouver $\ln$:

g est de la forme $uv - u$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

donc g est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $g' = u'v + uv' - u'$
donc, pour tout $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1\times\ln x + x\times\frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

Donc g est bien une primitive de $\ln$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

---

2. Dérivons F pour trouver f.

F est de la forme $-\dfrac{3}{2}\ln(u)$ avec $u(x) = 1 + e^{-2x}$ et $u'(x) = -2e^{-2x}$

donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = -\dfrac{3}{2}\dfrac{u'}{u}$.

donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{3}{2}\,\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \\ &= \frac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \end{aligned}$$

Il n'est pas évident d'y voir $f(x)$ …
N'oubliez pas que pour démontrer que deux choses sont égales, on peut <u>partir de l'une pour arriver à l'autre</u> mais on peut aussi <u>partir des deux pour arriver à la même chose</u>.

$$\begin{aligned} \text{Or, } f(x) &= 3 - \frac{3}{1+e^{-2x}} \\ &= \frac{3(1+e^{-2x})}{1+e^{-2x}} - \frac{3}{1+e^{-2x}} \\ &= \frac{3+3e^{-2x}-3}{1+e^{-2x}} \\ &= \frac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \\ &= F'(x) \end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Avec de l'astuce, on pouvait néanmoins continuer le calcul et arriver à $f(x)$:

$$\begin{aligned} \ldots \quad &= \frac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \\ &= \frac{3e^{-2x}+3-3}{1+e^{-2x}} \\ &= \frac{3(1+e^{-2x})}{1+e^{-2x}} - \frac{3}{1+e^{-2x}} \\ &= 3 - \frac{3}{1+e^{-2x}} = f(x) \end{aligned}$$

astuce !

---

② **1.** On a une simple somme d'expressions usuelles avec des constantes multiplicatives qui sont conservées.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto -3\dfrac{x^3}{3} + 5\dfrac{x^2}{2} - 2x = -x^3 + \dfrac{5x^2}{2} - 2x$. → Pensez à arranger votre expression si c'est possible.

---

2. De même ici :

Une primitive de g sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est $x \mapsto e^x + \ln x$
donc les primitives de g sur $]\,0\,;+\infty\,[$ sont les fonctions $G_k : x \mapsto e^x + \ln x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

---

3. **a.** Une primitive de h sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est $H : x \mapsto 2\ln x$.

b. Nous n'avons plus une expression usuelle.
Cherchons une forme usuelle.

h est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x - 1$ strictement positif sur $]\,1\,;+\infty\,[$ et $u'(x) = 1$, → Signaler la positivité pour entrer dans $\ln$.

donc, une primitive de h sur $]\,1\,;+\infty\,[$ est $H = \ln(u) : x \mapsto \ln(x-1)$.

c. Non, ce n'est pas deux fois la même question !

h est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x - 1$ strictement négatif sur $]-\infty\,;1\,[$ et $u'(x) = 1$, → Signaler la négativité…

donc, une primitive de h sur $]-\infty\,;1\,[$ est $H = \ln(-u) : x \mapsto \ln(1-x)$. → … pour que $-u$ soit positif.

d. On n'est pas loin de la forme usuelle $\frac{u'}{u}$ mais il manque $u'(x) = 2$ en numérateur.

Forçons sa présence en compensant :

$\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{2x+1}$

h est de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2x+1$ strictement positif sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et $u'(x) = 2$,

donc, une primitive de h sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ est $H = \frac{1}{2}\ln(u) : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(2x+1)$. → Ne pas oublier votre constante multiplicative.

e. Oh, comme c'est gentil ne nous mettre le 2 ... Oui mais il manque quand même un petit quelque chose...

$\frac{2}{1-2x} = -\frac{-2}{1-2x}$

h est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1-2x$ strictement positif sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ et $u'(x) = -2$,

donc, une primitive de h sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ est $H = -\ln(u) : x \mapsto -\ln(1-2x)$.

f. Ah ben là, on nous a mis un 3 qui ne nous convient pas.
On va le pousser sur le côté mais ne pas l'oublier !

$\frac{3}{2x+1} = 3 \times \frac{1}{2}\,\frac{2}{2x+1}$

h est de la forme $\frac{3}{2}\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2x+1$ strictement positif sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et $u'(x) = 2$,

donc, une primitive de h sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ est $H = \frac{3}{2}\ln(u) : x \mapsto \frac{3}{2}\ln(2x+1)$.

g. Même problème que dans le **e.** mais on a changé de forme ! On n'est pas loin de la forme usuelle $\frac{u'}{u^2}$.

$\frac{3}{(2x+1)^2} = 3 \times \frac{1}{2}\,\frac{2}{(2x+1)^2}$

h est de la forme $\frac{3}{2}\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 2x+1$ et $u'(x) = 2$, → Plus besoin de la positivité.

donc, une primitive de h sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ est $H = \frac{3}{2}\,\frac{-1}{u} : x \mapsto \frac{3}{2}\,\frac{-1}{2x+1} = \frac{-3}{2(2x+1)}$.

h. On est passé à la forme usuelle $\frac{u'}{u^3}$.

$\frac{3}{(2x+1)^3} = 3 \times \frac{1}{2}\,\frac{2}{(2x+1)^3}$

h est de la forme $\frac{3}{2}\frac{u'}{u^3}$ avec $u(x) = 2x+1$ et $u'(x) = 2$,

donc, une primitive de h sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ est $H = \frac{3}{2}\,\frac{1}{-2}\,\frac{1}{u^2} : x \mapsto \frac{3}{2}\,\frac{1}{-2}\,\frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{-3}{4(2x+1)^2}$.

Si vous n'êtes pas à l'aise avec la formule $\frac{1}{-n+1}\,\frac{1}{u^{n-1}}$, vous pouvez écrire $\frac{u'}{u^3}$ sous la forme $u'\,u^{-3}$ et utiliser la formule $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.
Une primitive de $u'\,u^{-3}$ est en effet $\frac{u^{-3+1}}{-3+1}$ qui devient bien $\frac{1}{-2}\,\frac{1}{u^2}$.

i. Attention au carré ! Ce n'est pas la forme $\frac{u'}{u^2}$.

C'est de nouveau $\frac{u'}{u}$ mais on a changé de u !

$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+1}$

h est de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+1$ strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $H = \ln(u) : x \mapsto \ln(x^2+1)$.

j. C'est encore du $\frac{u'}{u}$.

Mais alors, quel est le problème ?

x^2+x+1 a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$

donc il est du signe constant de son coefficient dominant 1 positif.

h est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+x+1$ strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x+1$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $H = \ln(u) : x \mapsto \ln(x^2+x+1)$.

4. Une première difficulté sera de gérer la constante additive.
Attention ! Elle ne disparaît pas...

$\dfrac{1}{2-3x} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{-3}{2-3x}$

φ est de la forme $1 - \dfrac{1}{3}\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2-3x$ positif sur $\left]-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right[$ et $u'(x) = -3$,

donc, une primitive de φ sur $\left]-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right[$ est $x \mapsto x - \dfrac{1}{3}\ln(2-3x)$ → On peut alléger en n'écrivant pas la forme générale.

donc, F est de la forme des primitives de φ sur $\left]-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right[$ qui sont les $x \mapsto x - \dfrac{1}{3}\ln(2-3x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Il faut maintenant trouver la constante k pour vérifier la condition :

Alors :

$F(-2) = 0$

$\Leftrightarrow -2 - \dfrac{1}{3}\ln(2-3\times(-2)) + k = 0$

$\Leftrightarrow k = 2 + \dfrac{1}{3}\ln 8$

$\Leftrightarrow k = 2 + \ln 2$

Car :

$$2 + \frac{1}{3}\ln 8 = 2 + \frac{1}{3}\ln 2^3 = 2 + \frac{1}{3}\times 3\ln 2 = 2 + \ln 2$$

On en déduit que F est la fonction définie par $F(x) = x - \dfrac{1}{3}\ln(2-3x) + 2 + \ln 2$.

---

5. **a.** $\dfrac{1}{\sqrt{6x-3}} = \dfrac{1}{6}\dfrac{6}{\sqrt{6x-3}}$

f est de la forme $\dfrac{1}{6}\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 6x-3$ et $u'(x) = 6$,

donc, une primitive de f sur $]2\,;+\infty[$ est $F = \dfrac{1}{6}2\sqrt{u} : x \mapsto \dfrac{1}{6}\times 2\sqrt{6x-3} = \dfrac{\sqrt{6x-3}}{3}$.

b. f est de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x-3$ et $u'(x) = 1$,

donc, une primitive de f sur $]3\,;+\infty[$ est $F = 2\sqrt{u} : x \mapsto 2\sqrt{x-3}$.

c. $\dfrac{2}{\sqrt{3-6x}} = 2\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)\dfrac{-6}{\sqrt{6x-3}}$

f est de la forme $-\dfrac{1}{3}\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 3-6x$ et $u'(x) = -6$,

donc, une primitive de f sur $]-\infty\,;2[$ est $F = -\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{u} : x \mapsto -\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{3-6x} = \dfrac{-2\sqrt{3-6x}}{3}$.

d. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$

f est de la forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2+1$ et $u'(x) = 2x$,

donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{u} : x \mapsto \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$.

---

6. **a.** $(2x-5)^5 = \dfrac{1}{2}\times 2\,(2x-5)^5$

g est de la forme $\dfrac{1}{2}u'u^5$ avec $u(x) = 2x-5$ et $u'(x) = 2$,

donc, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G = \dfrac{1}{2}\dfrac{u^6}{6} : x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{(2x-5)^6}{6} = \dfrac{(2x-5)^6}{12}$.

b. $7(2x-5)^7 = 7\times\dfrac{1}{2}\times 2\,(2x-5)^5$

g est de la forme $\dfrac{7}{2}u'u^7$ avec $u(x) = 2x-5$ et $u'(x) = 2$,

donc, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G = \dfrac{7}{2}\dfrac{u^8}{8} : x \mapsto \dfrac{7}{2}\dfrac{(2x-5)^8}{8} = \dfrac{7(2x-5)^8}{16}$.

c. $x(x^2+1)^4 = \dfrac{1}{2}\times 2x\,(x^2+1)^4$

g est de la forme $\dfrac{1}{2}u'u^4$ avec $u(x) = x^2+1$ et $u'(x) = 2x$,

donc, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G = \dfrac{1}{2}\dfrac{u^5}{5} : x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+1)^5}{5} = \dfrac{(x^2+1)^5}{10}$.

d. $(x+1)(x^2+2x-5)^9 = \dfrac{1}{2}(2x+2)(x^2+2x-5)^9$

g est de la forme $\dfrac{1}{2}u'u^9$ avec $u(x) = x^2+2x-5$ et $u'(x) = 2x+2$,

donc, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G = \dfrac{1}{2}\dfrac{u^{10}}{10} : x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2+2x-5)^{10}}{10} = \dfrac{(x^2+2x-5)^{10}}{20}$.

---

7. ψ est de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}} + u'u^3$ avec $u(x) = x+1$ et $u'(x) = 1$,

donc, une primitive de ψ sur $]\,1\,;+\infty\,[$ est $2\sqrt{u} + \dfrac{u^4}{4} : x \mapsto 2\sqrt{x+1} + \dfrac{(x+1)^4}{4}$

donc, G est de la forme des primitives de ψ sur $]\,1\,;+\infty\,[$ qui sont les $x \mapsto 2\sqrt{x+1} + \dfrac{(x+1)^4}{4} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Trouver la constante k :

Alors :

$G(0) = 2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{0+1} + \dfrac{(0+1)^4}{4} + k = 2$

$\Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{4}$

On en déduit que G est la fonction définie par $G(x) = 2\sqrt{x+1} + \dfrac{(x+1)^4}{4} - \dfrac{1}{4}$.

---

8. **a.** $e^{3x+1} = \dfrac{1}{3} \times 3\,e^{3x+1}$

f est de la forme $\dfrac{1}{3}u'e^u$ avec $u(x) = 3x+1$ et $u'(x) = 3$,

donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = \dfrac{1}{3}e^u : x \mapsto \dfrac{1}{3}e^{3x+1}$.

b. $e^{2-x} = -(-e^{2-x})$

f est de la forme $-u'e^u$ avec $u(x) = 2-x$ et $u'(x) = -1$,

donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = -e^u : x \mapsto -e^{2-x}$.

c. $2\,e^{1-2x} = -(-2\,e^{1-2x})$

f est de la forme $-u'e^u$ avec $u(x) = 1-2x$ et $u'(x) = -2$,

donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = -e^u : x \mapsto e^{1-2x}$.

d. $\dfrac{2}{e^x} = 2\,e^{-x} = -2(-e^{-x})$

f est de la forme $-2u'e^u$ avec $u(x) = -x$ et $u'(x) = -1$,

donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = -2e^u : x \mapsto -2\,e^{-x} = \dfrac{-2}{e^x}$.

e. $x\,e^{x^2} = \dfrac{1}{2} \times 2x\,e^{x^2}$

f est de la forme $\dfrac{1}{2}u'e^u$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$,

donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = \dfrac{1}{2}e^u : x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{x^2}$.

---

9. **a.** $1 - e^{2x-1} = 1 - \dfrac{1}{2} \times 2\,e^{2x-1}$

v est de la forme $1 - \dfrac{1}{2}u'e^u$ avec $u(x) = 2x-1$ et $u'(x) = 2$,

donc, une primitive de v sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto x - \dfrac{1}{2}e^{2x-1}$

donc, les primitives de v sur $\mathbb{R}$ sont les $x \mapsto x - \dfrac{1}{2}e^{2x-1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

b. La représentation graphique passe par le point $A(1\,;1)$

$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}e^{2\times1-1} + k = 1$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{e}{2}$

On en déduit que la primitive de v dont la représentation graphique passe par $A(1\,;1)$ est $x \mapsto x - \dfrac{1}{2}e^{2x-1} + \dfrac{e}{2}$.

---

10. **a.** *Une première méthode serait de développer : $(e^x - 1)\,e^x = e^{2x} - e^x$ et on a deux expressions qu'on saura gérer facilement.*
Mais montrons une seconde méthode qui servira pour les exemples suivants...

h est de la forme $u'u$ avec $u(x) = e^x + 1$ et $u'(x) = e^x$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{u^2}{2} : x \mapsto \dfrac{(e^x+1)^2}{2}$.

b. h est de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = e^x + 1$ et $u'(x) = e^x$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{u^3}{3} : x \mapsto \dfrac{(e^x+1)^3}{3}$.

c. h est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + 1$ strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = e^x$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\ln u : x \mapsto \ln(e^x + 1)$. $\rightarrow$ *Attention, on ne peut pas utiliser $\ln e^x = x$ à cause du $+1$.*

d. h est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\frac{-1}{u} : x \mapsto -\frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$.

e. $\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-x}+1) = -(-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{-x}+1)$

h est de la forme $-u'u$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{-x}+1$ et $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\frac{u^2}{2} : x \mapsto \frac{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2}{2}$.

f. $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} = -\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}$

h est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{-x}+1$ strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\ln u : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{-x}+1)$.

g. $\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{2x}-2) = \frac{1}{2} \times 2\,\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{2x}-2)$

h est de la forme $\frac{1}{2}u'u$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{2x}-2$ et $u'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{2}\frac{u^2}{2} : x \mapsto \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{e}^{2x}-2)^2}{2}$.

h. $\frac{x\,\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+2} = \frac{1}{2}\,\frac{2x\,\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+2}$

h est de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{x^2}+2$ strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\ln u : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{x^2}+2)$.

---

11. *Deux grands classiques...*

a. *La première expression est très simple à condition d'avoir l'idée de séparer la fraction :*

$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x}\ln x$

p est de la forme $u'u$ avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$,

donc, une primitive de p sur $]0\,;+\infty[$ est $\frac{u^2}{2} : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2}$.

b. *La seconde s'appuie sur la même astuce :*

$\frac{1}{x\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$

q est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$ strictement positif sur $]1\,;+\infty[$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$,

donc, une primitive de q sur $]1\,;+\infty[$ est $\ln u : x \mapsto \ln(\ln x)$.

---

③ **1.** *On se ramène à la forme $y' = ay$ la plus simple que nous savons résoudre.*

$y' + 2y = 0 \iff y' = -2y$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-2x}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

---

2. *On se ramène à la forme $y' = ay + b$, la deuxième forme que nous savons résoudre.*

$y' + 2y = 5 \iff y' = -2y + 5$

- $0 = -2k + 5 \iff k = \frac{5}{2}$

  donc, la solution particulière constante est $x \mapsto \frac{5}{2}$.
- On en déduit que les solutions sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{5}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

---

3. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} G(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ G'(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc
$$\begin{aligned} G'(x) + 2G(x) &= \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

donc G est une solution particulière de $(E) : y' + 2y = x$.

b. *On se ramène à la troisième forme $y' = ay + f$ que nous savons résoudre.*

$y' + 2y = x \Leftrightarrow y' = -2y + x$

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto C\,e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

---

4. **a.** f est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \text{ et } v'(x) = e^x \end{cases}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$

donc $f'(x) = 1 \times e^x + x\,e^x$

$= e^x + x\,e^x$

$\begin{cases} f(x) = x\,e^x \\ f'(x) = e^x + x\,e^x \end{cases}$

donc $f'(x) - f(x) = e^x + x\,e^x - x\,e^x$

$= e^x$

donc f est une solution particulière de $(\mathscr{E}) : y' - y = e^x$.

b. $y' - y = e^x \Leftrightarrow y' = y + e^x$

Les solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions $x \mapsto C\,e^x + x\,e^x$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

c. $h(1) = 1$

$\Leftrightarrow C\,e^1 + 1\,e^1 = 1$

$\Leftrightarrow C = \dfrac{1-e}{e}$

Donc $h : x \mapsto \dfrac{1-e}{e}\,e^x + x\,e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

---

④ **1.** *Pour vérifier l'équation différentielle, il me faut d'abord la dérivée :*

u est de la forme vw avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{2x} \text{ et } v'(x) = 2\,e^{2x} \end{cases}$

donc u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u' = v'w + vw'$

donc $u'(x) = 1 \times e^{2x} + x \times 2\,e^{2x}$

$= (1 + 2x)\,e^{2x}$

On en déduit :

$u'(x) - 2\,u(x) = (1 + 2x)\,e^{2x} - 2\,x\,e^{2x}$

$= e^{2x}$

donc u est une solution particulière de (E).

2. *Application du cours :*

$y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$

Donc, les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto C\,e^{2x}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

3. *Version en deux implications réciproques :*

- Supposons v solution de (E).
  Alors :
  $(v - u)' - 2(v - u) = v' - u' - 2v + 2u$
  $= (v' - 2v) - (u' - 2u)$
  $= e^{2x} - e^{2x}$ car v solution de (E) et d'après **1.**
  $= 0$
  Donc $v - u$ solution de (E_0).
- Réciproquement, supposons $v - u$ solution de (E_0).
  Alors $(v - u)' - 2(v - u) = 0$
  et donc $(v' - 2v) - (u' - 2u) = 0$
  donc $v' - 2v = u' - 2u$
  $= e^{2x}$ d'après **1.**
  Donc v solution de (E).

Voici la version rapide par succession d'équivalences :

v solution de (E)

$\Leftrightarrow v' - 2v = e^{2x}$

$\Leftrightarrow v' - 2v = u' - 2u$ d'après **1.**

$\Leftrightarrow v' - 2v - u' + 2u = 0$

$\Leftrightarrow (v - u)' - 2(v - u) = 0$

$\Leftrightarrow v - u$ solution de (E_0).

4. v solution de (E)

$\Leftrightarrow v - u$ solution de (E_0) d'après **3.**

$\Leftrightarrow v - u$ de la forme $x \mapsto C\,e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ d'après **2.**

$\Leftrightarrow v$ de la forme $x \mapsto C\,e^{2x} + u(x) = C\,e^{2x} + x\,e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Donc, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto C\,e^{2x} + x\,e^{2x}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

5. $C\,e^{2\times 0} + 0\,e^{2\times 0} = 1$

$\Leftrightarrow C = 1$

Donc, la fonction est $x \mapsto e^{2x} + x\,e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$. *→ On peut factoriser sous la forme* $(1 + x)\,e^{2x}$.

⑤ **1.** $y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$

Donc, les solutions de (E_1) sont les fonctions $x \mapsto C\,e^{2x}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

2. **a.** ◆ f est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = ax + b \text{ et } u'(x) = a \\ v(x) = e^x \text{ et } v'(x) = e^x \end{cases}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$

donc $f'(x) = a\,e^x + (ax + b)\,e^x$

$= (ax + b + a)\,e^x$

◆ f solution de (E_2)

$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = xe^x$

$\Leftrightarrow (ax + b + a)\,e^x - 2(ax + b)\,e^x = xe^x$

$\Leftrightarrow (ax + b + a - 2ax - 2b)\,e^x = xe^x$

$\Leftrightarrow (-ax - b + a)\,e^x = xe^x$

$\Leftrightarrow -ax - b + a = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ -b + a = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

b. *Proposons la version rapide par équivalences :*

$f + g$ solution de (E_2)

$\Leftrightarrow (f + g)' - 2(f + g) = xe^x$

$\Leftrightarrow f' + g' - 2f - 2g = xe^x$

$\Leftrightarrow (f' - 2f) + g' - 2g = xe^x$

$\Leftrightarrow xe^x + g' - 2g = xe^x$ d'après **2. a.**

$\Leftrightarrow g' - 2g = 0$

$\Leftrightarrow g$ solution de (E_1) .

c. h solution de (E_2)

$\Leftrightarrow (h - f) + f$ solution de (E_2)

$\Leftrightarrow h - f$ solution de (E_1) d'après **2. b.**

$\Leftrightarrow h - f$ de la forme $x \mapsto C\,e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ d'après **1.**

$\Leftrightarrow h$ de la forme $x \mapsto C\,e^{2x} + f(x) = C\,e^{2x} + (-x - 1)\,e^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Donc, l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto C\,e^{2x} + (-x - 1)\,e^{2x}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

3. $C\,e^{2\times 0} + (-0 - 1)\,e^{2\times 0} = 0$

$\Leftrightarrow C - 1 = 0$

$\Leftrightarrow C = 1$

Donc, la fonction est $x \mapsto e^{2x} + (-x - 1)\,e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$. $\longrightarrow$ *La factorisation simplifie l'expression en $-x\,e^{2x}$.*