Correction exercices supplémentaires : Loi binomiale

Partie A : Loi binomiale

Exercice 1

1) Le forage conduit à une nappe de pétrole avec une probabilité 0,1 ou pas avec une probabilité 0,9. C'est donc bien une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,1. Il a bien que deux issues possibles.

2)
   a. Les forages doivent être indépendants pour que X suive une loi binomiale.
   b. $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}9^9 \approx \boxed{0{,}613}$

Exercice 2

On considère que le tirage de 1000 résistances a lieu avec remise et que donc les tirages sont indépendants les uns des autres. Le nombre X de résistances défectueuses suit donc une loi binomiale de paramètres 1000 et 0,005.

a. $p(X = 2) = \binom{1000}{2} \times 0{,}005^2 \times 0{,}995^{998} = 499500 \times 0{,}005^2 \times 0{,}995^{998} \approx \boxed{0{,}084}$

b. $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$

$$= \binom{1000}{0} \times 0{,}995^{1000} + \binom{1000}{1} \times 0{,}005 \times 0{,}995^{999} + \binom{1000}{2} \times 0{,}005^2 \times 0{,}995^{998} \approx \boxed{0{,}124}$$

c. $p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$

$= 1 - 0{,}995^{1000} - 1000 \times 0{,}005 \times 0{,}995^{999} \approx \boxed{0{,}960}$

Exercice 3

1) Les interrogations se font de manière indépendante les unes des autres et à chaque interrogation la probabilité d'avoir une fille est $\frac{20}{30}$ soit $\frac{2}{3}$ donc X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{3}$.

2) Pour $n = 10$

$$p(X = 4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 210 \times \frac{16}{81} \times \frac{1}{729} \approx \boxed{0{,}057}$$

$p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) \approx \boxed{0{,}980}$

3) On cherche n tel que $p(X = 0) \leq 0{,}001$ or $p(X = 0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$.

$$p(X = 0) \leq 0{,}001 \Leftrightarrow \frac{1}{3^n} \leq 0{,}001 \Leftrightarrow 3^n \geq \frac{1}{0{,}001} \Leftrightarrow 3^n \geq 1000$$

A l'aide d'un tableau de valeur de la calculatrice, on a $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$ donc $n \geq 7$

Il faut donc interroger pendant au moins 7 jours consécutifs pour que la probabilité de n'avoir aucune fille soit inférieure à 0,001.

Exercice 4

1) Les tirages sont indépendants et à chacun des deux tirages, on a 2 chances sur 10 d'avoir une boule gagnante. Le nombre de boules gagnantes suit donc une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{1}{5}$.

2) Dans le cas général, Y suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{2}{n}$.

$$q_n = p(Y = 1) = \binom{2}{1} \times \left(\frac{2}{n}\right)^1 \times \left(\frac{n-2}{n}\right)^1 = 2 \times \frac{2}{n} \times \frac{n-2}{n} = \frac{4n-8}{n^2}$$

Exercice 5

1) A la calculatrice :

$p(X = 3) \approx \boxed{0{,}012}$; $p(X = 17) \approx \boxed{0{,}00004}$; $p(X = 10) \approx \boxed{0{,}117}$

2) $p(X \leq 1) \approx \boxed{0{,}0005}$; $p(X \geq 18) = 1 - p(X \leq 17) \approx \boxed{0{,}99996}$; $p(X \leq 15) \approx \boxed{0{,}9997}$

$p(X \geq 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx 0\boxed{0{,}840}$

Exercice 6

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0,03.

3) Calculer $p(X = 3)$; $p(X = 17)$; $p(X = 10)$ à 10^{-3} près.
4) Calculer $p(X \leq 1)$; $p(X \geq 48)$; $p(X \leq 15)$ et $p(X \geq 10)$ à 10^{-3} près.

1) $p(X = 3) \approx \boxed{0{,}126}$; $p(X = 17) \approx \boxed{4 \times 10^{-14}}$; $p(X = 10) \approx \boxed{2 \times 10^{-6}}$
2) $p(X \leq 1) \approx \boxed{0{,}555}$; $p(X \geq 18) = 1 - p(X \leq 17) \approx \boxed{0}$; $p(X \leq 15) \approx \boxed{10^{-11}}$;

$p(X \geq 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx \boxed{2 \times 10^{-6}}$

<u>Partie B : Coefficients binomiaux</u>

Exercice 1

1) $\binom{6}{1}$ est le nombre de chemin conduisant à exactement un succès en 6 coups. Il y a 6 possibilités.
2) $\binom{7}{2} = \binom{6}{2} + \binom{6}{1} = 15 + 6 = \boxed{21}$
3) $\binom{7}{5} = \binom{7}{7-5} = \binom{7}{2} = \boxed{21}$

Exercice 2

1) $\boxed{VRAI}$ car $\binom{12}{9} = \binom{12}{12-9} = \binom{12}{3}$
2) $\boxed{VRAI}$ car $\binom{8}{4} = \binom{7}{4} + \binom{7}{3} = \binom{7}{7-4} + \binom{7}{3} = \binom{7}{3} + \binom{7}{3} = 2\binom{7}{3}$
3) $\boxed{FAUX}$ car $\binom{9}{5} = 126$ et $3\binom{8}{5} = 3 \times 56 = 168$

Exercice 3

$\binom{25}{0} = \boxed{(1)}$; $\binom{23}{22} = \binom{23}{1} = \boxed{23}$; $\binom{15}{15} = \boxed{1}$; $\binom{2013}{1} = \boxed{2013}$

Exercice 4

$\binom{52}{4} = \boxed{270725}$; $\binom{24}{20} = \boxed{10626}$; $\binom{13}{7} = \boxed{1716}$; $\binom{2013}{2000} = \boxed{1{,}37 \times 10^{33}}$

Exercice 5

$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$

$= \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2} = \boxed{\binom{7}{3}}$

Exercice 6

$\binom{6}{2} = \boxed{15}$; $\binom{6}{3} = \boxed{20}$; $\binom{6}{4} = \boxed{15}$ et $\binom{6}{5} = \boxed{6}$

<u>Partie C : Espérance et variance d'une loi binomiale</u>

Exercice 1

1) Les 6 feux sont indépendants les uns des autres et chacun a une probabilité de $\frac{2}{3}$ d'être vert. Donc le nombre X de feux verts rencontrés suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{2}{3}$.
2) Pour chaque feu vert, il n'y a pas d'attente mais pour les autres feux (il y en a $6 - X$), l'attente est de 1,5 minutes. De plus le trajet sans compter les feux dure 12 minutes car $\frac{3\times 60}{15} = 12$.

Donc $T = 12 + 1{,}5(6 - X) = \boxed{21 - 1{,}5X}$

3) $E(T) = E(21 - 1{,}5X) = 21 - 1{,}5E(X) = 21 - 1{,}5 \times 6 \times \frac{2}{3} = \boxed{15}$

En moyenne, l'élève met 15 minutes pour aller au lycée.

4)
   a. L'élève peut espérer être à l'heure car la moyenne est inférieure à 17 minutes.
   b. $p(T > 17) = p(21 - 1{,}5X > 17) = p\left(X < \frac{8}{3}\right) = p(X \leq 2) \approx \boxed{0{,}1}$

Exercice 2

a. X étant le nombre de matchs gagnés sur les 3 joués, on a $X \in \{0; 1; 2; 3\}$.

De plus pour chaque match perdu, Benjamin verse 20€ donc $D = 20(3 - X) = \boxed{60 - 20X}$

On a alors $\boxed{D \in \{60; 40; 20; 0\}}$

b. $D = 40$ si et seulement si $X = 1$. Il y a trois matchs indépendants les uns des autres et pour chaque match, la probabilité que Benjamin gagne est de 0,4 donc le nombre X de match gagnés par Benjamin suit une loi binomiale de paramètres 3 et 0,4.

$p(D = 40) = p(X = 1) = \binom{3}{1} \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^2 = 3 \times 0{,}4 \times 0{,}36 = \boxed{0{,}432}$

c. $E(D) = E(60 - 20X) = 60 - 20E(X) = 60 - 20 \times 3 \times 0{,}4 = 36$

En moyenne, Benjamin dépensera 36€ par an.

Exercice 3

1) Les 15 bulbes sont prélevées de manière indépendante car il y a un très grand nombre de bulbes et que pour chaque bulbe la probabilité de germer est de 0,83. Le nombre X de bulbes qui germent suit donc une loi binomiale de paramètres 15 et 0,83.

2) $p(X = 5) = \binom{15}{5} \times 0{,}83^5 \times (1 - 0{,}83)^{10} = 3003 \times 0{,}83^5 \times 0{,}17^{10} \approx \boxed{0{,}00002}$

3) $p(X \geq 9) = 1 - p(X < 9) = 1 - p(X \leq 8) \approx \boxed{0{,}993}$

4) $E(X) = 15 \times 0{,}83 = 12{,}45$

En moyenne, il y a 12 ou 13 bulbes qui germent.

Exercice 4

1)

a. Les 40 contrôles sont indépendants les uns des autres et pour chaque voyage, la probabilité d'être contrôlé est de 0,05 donc le nombre X de contrôle subit suit une loi binomiale de paramètres 40 et 0,05.

$p(X \leq 2) \approx \boxed{0{,}6767}$

b. Pour les trajets où il est contrôlé, Théo perd 100€ et pour les trajets où il n'est pas contrôlé (il y en a $40 - X$), il gagne les 10€ du trajet.

$Z = -100X + 10(40 - X) = \boxed{400 - 110X}$

$E(Z) = E(400 - 110X) = 400 - 110E(X) = 400 - 110 \times 40 \times 0{,}05 = 180$

En moyenne Théo gagne 180€ par mois.

2) Le raisonnement est le même : X suit une loi binomiale de paramètres 40 et p.

$$E(Z) \geq 0 \Leftrightarrow E(400 - 110X) \geq 0 \Leftrightarrow 400 - 110E(X) \geq 0 \Leftrightarrow 400 - 110 \times 40p \geq 0 \Leftrightarrow p \leq \frac{400}{110 \times 40}$$

Donc il faut que $p \leq \frac{1}{11}$ pour que la fraude systématique soit favorable à Théo.

Exercice 5

1) $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc $\boxed{Vrai}$

2) $p(X = 1) = \frac{5}{3}p(X = 0) \Leftrightarrow \binom{5}{1} \times p^1 \times (1 - p)^4 = \frac{5}{3} \times \binom{5}{0} \times p^0 \times (1 - p)^5$

$\Leftrightarrow 5p(1 - p)^4 = \dfrac{5}{3}(1 - p)^5 \Leftrightarrow 5p(1 - p)^4 - \dfrac{5}{3}(1 - p)^5 = 0 \Leftrightarrow 5(1 - p)^4\left[p - \dfrac{1}{3}(1 - p)\right] = 0$

$\Leftrightarrow 5(1 - p)^4\left(\dfrac{4}{3}p - \dfrac{1}{3}\right) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc $p = 1$ ou $p = \frac{1}{4}$.

Dans le premier cas, $p(X = 2) = \binom{5}{2} \times p^2 \times (1 - p)^3 = 10 \times 1^2 \times 0^3 = 0$ et $p(X = 3) = 0$ de même donc on a bien $p(X = 2) = 3p(X = 3)$.

Dans le second cas, $p(X = 2) = 10 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{270}{1024} = \frac{135}{512}$ et $p(X = 3) = 10 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{90}{1024} = \frac{45}{512}$ donc on a bien $p(X = 2) = 3p(X = 3)$. Finalement, l'égalité est $\boxed{Vraie}$

3) $E(X) = 36 \Leftrightarrow np = 36$

$\sigma(X) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{np(1 - p)} = 3 \Leftrightarrow np(1 - p) = 9$

On en déduit donc $1 - p = \frac{9}{np} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ d'où $p = \frac{3}{4}$.

De plus $np = 36$ donc $n = \frac{36}{p} = 36 \times \frac{4}{3} = 48$

$p(X = 29) \approx 0{,}01$ donc $\boxed{Vrai}$

Exercice 6

1) On a n tirages indépendants les uns des autres et à chaque tirage, on a une probabilité $\frac{1}{6}$ d'avoir un jeton noir. Le nombre N de jetons noirs suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{6}$.

De la même manière, R suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{3}$.

2) $E(N) = n \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{n}{6}}$ $\sigma(N) = n \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5n}{36}}$

$E(R) = n \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{n}{3}}$ et $\sigma(R) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2n}{9}}$

3)

a. A chaque tirage, la probabilité d'avoir un jeton noir ou rouge est $\frac{1}{2}$ donc S suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

b. $E(S) = n \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{n}{2}}$ et $\sigma(S) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{n}{4}}$

c. On remarque que $S = N + R$

$E(N+R) = E(S) = \frac{n}{2}$ et $E(N) + E(R) = \frac{n}{6} + \frac{n}{3} = \frac{3n}{6} = \frac{n}{2}$ donc $\boxed{E(N+R) = E(N) + E(R)}$

$V(N+R) = V(S) = \frac{n}{4}$ et $V(N) + V(R) = \frac{5n}{36} + \frac{2n}{9} = \frac{5n+8n}{36} = \frac{13n}{36}$ donc $\boxed{V(N+R) \neq V(N) + V(R)}$

Partie D : Echantillonnage

Exercice 1

1) Au seuil de 95% : $\frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0{,}025$ et $p(X \leq b) \geq 0{,}975$

A la calculatrice, $p(X \leq 65) \approx 0{,}016$ et $p(X \leq 66) \approx 0{,}0275$ donc $a = 66$

$p(X \leq 82) \approx 0{,}96$ et $p(X \leq 83) \approx 0{,}978$ donc $b = 83$

Nous avons donc $p(66 \leq X \leq 83) \geq 0{,}95$ et donc $p(0{,}66 \leq f \leq 0{,}83) \geq 0{,}95$.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% pour un échantillon de taille 100 est $\boxed{[0{,}66; 0{,}83]}$

2) $0{,}64 \notin [0{,}66; 0{,}83]$ donc le directeur de marketing peut rejeter l'hypothèse que trois quarts des clients sont fidèles.

Exercice 2

1) Au seuil de 95% : $\frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0{,}025$ et $p(X \leq b) \geq 0{,}975$

A la calculatrice, $p(X \leq 105) \approx 0{,}019$ et $p(X \leq 106) \approx 0{,}026$ donc $a = 106$

$p(X \leq 132) \approx 0{,}9654$ et $p(X \leq 133) \approx 0{,}9752$ donc $b = 133$.

Nous avons $p(106 \leq X \leq 133) \geq 0{,}95$ et donc $p\left(\frac{106}{200} \leq f \leq \frac{133}{200}\right) \geq 0{,}95$. L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est donc $\boxed{[0{,}53; 0{,}665]}$

2) $f = \frac{104}{200} = 0{,}52$ or $f \neq [0{,}53; 0{,}665]$ donc on peut rejeter l'hypothèse que A dit vrai.

3) Au seuil de 98% : $\frac{1-0{,}98}{2} = 0{,}01$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0{,}01$ et $p(X \leq b) \geq 0{,}99$

On trouve $a = 104$ et $b = 136$. L'intervalle de fluctuation au seuil de 98% est $[0{,}52; 0{,}68]$ et cette fois, $f \in [0{,}52; 0{,}68]$ donc on ne peut pas rejeter l'hypothèse que A dit vrai.

Exercice 3

Déterminons l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% des fréquences d'infections nosocomiales en France pour un échantillon de taille 19400.

On considère pour cela, la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 19400 et $\frac{18000}{360000} = 0{,}05$.

Au seuil de 95% : $\frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0{,}025$ et $p(X \leq b) \geq 0{,}975$

$p(X \leq 910) \approx 0{,}0241$ et $p(X \leq 911) \approx 0{,}0261$ donc $a = 911$

$p(X \leq 1029) \approx 0{,}9742$ et $p(X \leq 1030) \approx 0{,}976$ donc $b = 1030$

On obtient donc $911 \leq X \leq 1030$ soit $\frac{911}{19400} \leq f \leq \frac{1030}{19400}$ ou encore $[0{,}0469; 0{,}0531]$ comme intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

La fréquence d'infections nosocomiales dans les Pays de la Loire est de $\frac{930}{19400}$ soit environ 0,0479 qui appartient bien à l'intervalle de fluctuation. Donc on peut dire qu'il n'y a pas de différence significative entre les résultats des Pays de la Loire et les résultats nationaux.

Exercice 4

1) $\boxed{FAUX}$ Par exemple, si X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,5, nous avons $[0{,}4; 0{,}6]$ comme intervalle de fluctuation au seuil de 95% et $[0{,}37; 0{,}63]$ comme intervalle de fluctuation au seuil de 99%. Si la fréquence observée est 0,38, on rejette l'hypothèse au seuil de 95% mais on l'accepte au seuil de 99%.

2)

a. $\boxed{Vrai}$: Au seuil de 90% : $\frac{1-0,9}{2}=0,05$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0,05$ et $p(X \leq b) \geq 0,95$

Si X représente une variable aléatoire de paramètres 40 et 0,5, l'intervalle de fluctuation est $[0,375\,;0,625]$ grâce à la calculatrice car $p(X \leq 14) \approx 0,04$; $p(X \leq 15) \approx \ \ 0,08$; $p(X \leq 24) \approx 0,923\ \ et$
$p(X \leq 25) \approx 0,96$ donc $a = 15$ et $b = 25$ et on obtient $\left[\frac{15}{40};\frac{25}{40}\right]$ comme intervalle de fluctuation au seuil de 90%.

b. $\boxed{Vrai}$: $\frac{26}{40} = 0,65$

Exercice 5

1) Au seuil de 95% : $\frac{1-0,95}{2} = 0,025$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0,025$ et $p(X \leq b) \geq 0,975$
$p(X \leq 30) \approx 0,016$ et $p(X \leq 31) \approx 0,028$ donc $a = 31$
$p(X \leq 48) \approx 0,971$ et $p(X \leq 49) \approx 0,983$ donc $b = 49$.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est donc $I = \left[\frac{31}{80};\frac{49}{80}\right]$ soit $I = [0,3875; 0,6125]$

2) $f = \frac{52}{80} = 0,65$ et $f \notin I$ donc on peut rejeter l'hypothèse que le dé est équilibré.

Exercice 6

Au seuil de 95% : $\frac{1-0,95}{2} = 0,025$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0,025$ et $p(X \leq b) \geq 0,975$
Pour un échantillon de taille 102, avec une probabilité théorique de 0,75 de gagner, l'intervalle de fluctuation est [;] car $p(X \leq 67) \approx 0,022$ et $p(X \leq 68) \approx 0,036$ donc $a = 68$
$p(X \leq 84) \approx 0,970$ et $p(X \leq 85) \approx 0,983$ donc $b = 85$
$68 \leq X \leq 85 \Leftrightarrow \frac{68}{102} \leq F \leq \frac{85}{102} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq F \leq \frac{5}{6}$ donc on obtient $[0,66; 0,84]$ comme intervalle de fluctuation au seuil de 95%.
$f = \frac{58}{102} \approx 0,57$ et $f \notin I$ donc on peut rejeter l'hypothèse que 75% des billets sont gagnants.

Exercice 7

1) Au seuil de 90% : $\frac{1-0,9}{2} = 0,05$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0,05$ et $p(X \leq b) \geq 0,95$
$p(X \leq 5) \approx 0,048$ et $p(X \leq 6) \approx 0,103$ donc $a = 6$
$p(X \leq 14) \approx 0,939$ et $p(X \leq 15) \approx 0,969$ donc $b = 15$
L'intervalle de fluctuation au seuil de 90% est donc $\left[\frac{6}{50};\frac{15}{50}\right]$ soit $I = [0,12; 0,3]$
$f = 0,26 \in I$ donc il n'y a pas lieu de s'inquiéter.

2) Au seuil de 98% : : $\frac{1-0,98}{2} = 0,01$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0,01$ et $p(X \leq b) \geq 0,99$
$p(X \leq 3) \approx 0,005$ et $p(X \leq 4) \approx 0,018$ donc $a = 4$
$p(X \leq 16) \approx 0,985$ et $p(X \leq 17) \approx 0,993$ donc $b = 17$
L'intervalle de fluctuation au seuil de 98% est donc $\left[\frac{4}{50};\frac{17}{50}\right]$ soit $I = [0,08; 0,34]$
$f = 0,26 \in I$ donc il n'y a pas lieu de s'inquiéter.

Exercice 8

Au seuil de 95% : $\frac{1-0,95}{2} = 0,025$ donc on cherche a et b tels que $p(X \leq a) > 0,025$ et $p(X \leq b) \geq 0,975$
Pour 30 lancers :
$p(X \leq 9) \approx 0,021$ et $p(X \leq 10) \approx 0,049$ donc $a = 10$
$p(X \leq 19) \approx 0,095$ et $p(X \leq 20) \approx 0,978$ donc $b = 20$
$I_{30} = \left[\frac{10}{30};\frac{20}{30}\right] \approx [0,33; 0,67]$ Comme $0,42 \in I_{30}$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse que la pièce n'est pas équilibrée.
Pour 100 lancers :
$p(X \leq 39) \approx 0,017$ et $p(X \leq 40) \approx 0,028$ donc $a = 40$
$p(X \leq 59) \approx 0,971$ et $p(X \leq 60) \approx 0,982$ donc $b = 60$
$I_{100} = [0,4; 0,6]$ Comme $0,42 \in I_{100}$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse que la pièce n'est pas équilibrée.
Pour 1000 lancers, on obtient $I_{1000} = [0,469; 0,531]$ et cette fois $0,42 \notin I_{1000}$ donc on peut rejeter l'hypothèse que la pièce est équilibrée.

Partie E : Bilan

Exercice 1

1) Les n tirages sont indépendants les uns des autres et à chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche est $\frac{5}{9}$. Le nombre X de boules blanches suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{5}{9}$.

$$p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = \boxed{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}$$

2) A l'aide de la calculatrice : $1 - \left(\frac{4}{9}\right)^5 \approx 0{,}983$ et $1 - \left(\frac{4}{9}\right)^6 \approx 0{,}992$ donc il faut tirer au moins 6 boules pour que la probabilité d'en avoir au moins une blanche soit supérieure à 0,99.

Exercice 2

1) Le choix des n touristes est indépendant les uns des autres. Pour chacun, la probabilité de partir à l'Est est $\frac{1}{2}$ donc le nombre X de touristes qui part vers l'Est suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \boxed{\binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n}}$$

2)

a. Comme n est supérieur à 3, si un touriste est seul sur un plage (et donc qu'il est heureux), il y en a au moins deux sur l'autre plage et il n'y a donc qu'un seul touriste heureux au maximum.

b. Un touriste est heureux s'il est seul sur la plage. Cela peut se produire sur la plage à l'Est (et ceci correspond à $X = 1$) ou à l'Ouest (et ceci correspond à $X = n - 1$).

$$p = p(X = 1) + p(X = n - 1) = \binom{n}{1} \times \frac{1}{2^n} + \binom{n}{n-1} \times \frac{1}{2^n} = n \times \frac{1}{2^n} + n \times \frac{1}{2^n} = \frac{2n}{2^n} = \boxed{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

c. Pour $n = 10$, $p = \frac{10}{2^9} = \frac{10}{512} \approx \boxed{0{,}02}$

Exercice 3

1) La pièce est équilibrée donc les tirages sont indépendants et à chaque tirage, la probabilité d'avoir pile est $\frac{1}{2}$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$; Y suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$ et Z suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$.

2) $p(X = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 252 \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{256} \approx \boxed{0{,}246}$

3) $p(Y = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{2^5} = \boxed{\frac{5}{16} = 0{,}3125}$

$$p(Z = 3) = \binom{5}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{5}{16} = 0{,}3125}$$

$p(Y = 2 \text{ et } Z = 3) = p(Y = 2) \times p(Z = 3) = \frac{25}{256} \approx \boxed{0{,}098}$ car les événements sont indépendants donc on multiplie les probabilités entre elles.

4)

a. $p(E_2) = p(Y = 2 \text{ et } Z = 3) = \boxed{\frac{25}{256}}$

b. $p(E_0) = p(Y = 0 \text{ et } Z = 5) = p(Y = 0) \times p(Z = 5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boxed{\frac{1}{1024}}$

$$p(E_1) = p(Y = 1 \text{ et } Z = 4) = p(Y = 1) \times p(Z = 4) = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boxed{\frac{25}{1024}}$$

$$p(E_3) = p(Y = 3 \text{ et } Z = 2) = p(Y = 3) \times p(Z = 2) = \boxed{\frac{25}{256}}$$

$$p(E_4) = p(Y = 4 \text{ et } Z = 1) = p(Y = 4) \times p(Z = 1) = \boxed{\frac{25}{1024}}$$

$$p(E_5) = p(Y = 5 \text{ et } Z = 0) = \boxed{\frac{1}{1024}}$$

c. Pour obtenir exactement 5 piles en 10 lancers, on peut avoir obtenus entre 0 et 5 piles parmi les 5 premiers lancers et le complément à 5 piles sur les 5 derniers lancers. On a donc bien $p(X = 5) = p(E_0) + p(E_1) + \cdots + p(E_5)$. On a alors

$$\binom{10}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\sum_{k=0}^{k=5}\binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}\times\binom{5}{5-k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Leftrightarrow \binom{10}{5}\times\frac{1}{2^{10}}=\sum_{k=0}^{k=5}\binom{5}{k}^2\times\frac{1}{2^{10}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\binom{10}{5}=\sum_{k=0}^{k=5}\binom{5}{k}^2}$$

5) On lance $2n$ fois la pièce et on note X le nombre de fois où on a obtenu Pile, Y le nombre de fois où on a obtenu Pile sur les n premiers lancers et Z le nombre de fois où on a obtenu Pile sur les n derniers lancers.

X, Y et Z suivent des lois binomiales de paramètres $2n$ (respectivement n et n) et $\frac{1}{2}$.

$$p(X=n)=\sum_{k=0}^{k=n}p(Y=k \text{ et } Z=n-k)=\sum_{k=0}^{k=n}p(Y=k)\times p(Z=n-k)=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{2n}{k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\binom{2n}{2n-k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\times\sum_{k=0}^{k=n}\binom{2n}{k}^2$$

On a donc bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}}$$

Exercice 4

1)

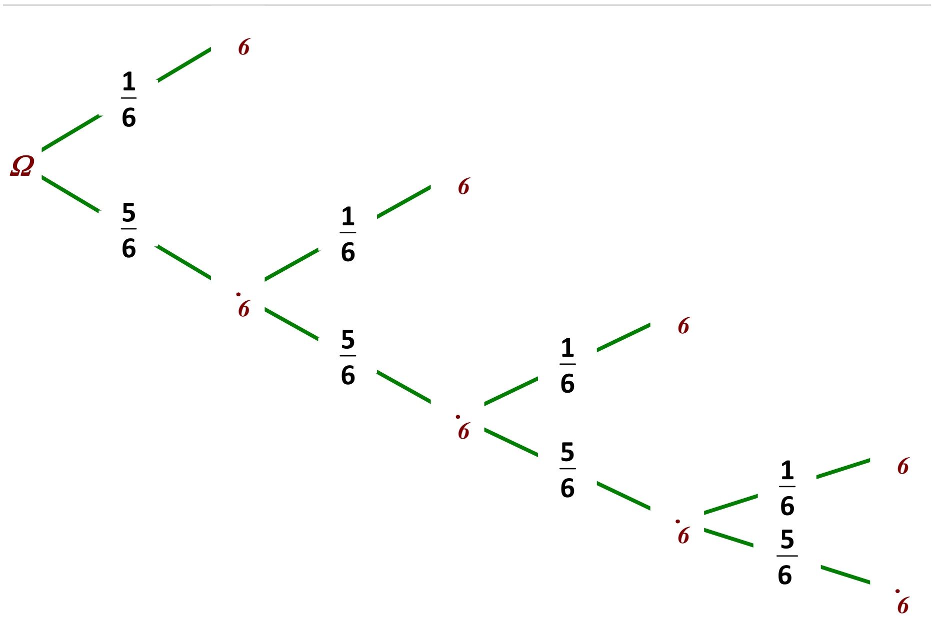
a. Il semble que la tortue soit favorisée : elle doit obtenir quatre fois un nombre entre 1 et 5 alors que le lièvre n'a qu'un seul résultat possible.

b.

$$p_4(T)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{625}{1296}\approx 0{,}48$$

$$p_4(L)=1-p_4(T)=1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}\approx 0{,}52$$

C'est donc le lièvre qui a plus de chance de gagner.



c. Grâce à l'arbre précédent, on a

x_i	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{216}$

Par exemple : $p(X=2)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$.

X ne suit donc pas une loi binomiale.

d. $E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{5}{36}+3\times\frac{25}{216}+4\times\frac{125}{216}=\frac{36}{216}+\frac{60}{216}+\frac{75}{216}+\frac{500}{216}=\frac{671}{216}\approx 3{,}1$

En moyenne, il faut donc environ 3 lancers pour obtenir un gagnant.

e. Dix parties indépendantes sont jouées. Pour chacune la probabilité que la tortue gagne est $\frac{625}{1296}$. Le nombre Y de victoires de la tortue suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{625}{1296}$.

$$p(Y=5)=\binom{10}{5}\times\left(\frac{625}{1296}\right)^5\times\left(\frac{671}{1296}\right)^5\approx\boxed{0{,}245}$$

$$p(Y\geq 2)=1-p(Y\leq 1)\approx\boxed{0{,}986}$$

2)

a. La tortue gagne si le dé donne n fois de suite un résultat autre que 6. On a donc $p_n(T)=\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Le jeu est favorable à la tortue si et seulement si $p_n(T)\geq p_n(L)$ or $p_n(L)=1-p_n(T)$.

On a donc : $p_n(T) \geq 1 - p_n(T) \Leftrightarrow p_n(T) \geq \frac{1}{2}$.

A la calculatrice : $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}58$ et $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}48$

Donc le jeu est favorable à la tortue pour des valeurs de n inférieures ou égales à 3

b. Comme à la question 1, Y, le nombre de parties remportées par la tortue sur n parties suit une loi binomiale de paramètres n et $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. L'espérance est donc $E(Y) = n \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Pour $n = 10$, on a $E(Y) = 10 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 1{,}6$

En moyenne, la tortue gagne 1,6 parties sur 10.