Savoir UTILISER UN INTERVALLE DE FLUCTUATION

Ce que je dois savoir faire

- **Comprendre ce qu'est un intervalle de fluctuation …**

dans un environnement probabiliste

- Pour un type d'objet aléatoire non truqué (dé non truqué, pièce équilibrée, …), on connaît la probabilité p d'un certain évènement.
- Avec un tel objet aléatoire non truqué, si on répète n épreuves, on forme un échantillon de taille n dans lequel l'évènement est réalisé avec une certaine fréquence f.
- Un intervalle de fluctuation au seuil 0,95 contient au moins 95 % des fréquences obtenues avec des objets non truqués.

dans un environnement statistique

- Dans une grande population (humains, animaux, objets fabriqués, …), on connaît la proportion p d'individus ayant une certaine caractéristique.
- Dans cette grande population, si on extrait n individus, on forme un échantillon représentatif de taille n dans lequel la caractéristique est représentée par une certaine fréquence f.
- Un intervalle de fluctuation au seuil 0,95 contient au moins 95 % des fréquences issues d'échantillons représentatifs.

- **Calculer un intervalle de fluctuation au seuil 0,95**

Les deux intervalles :

- Sous les conditions $\begin{cases} n \geqslant 25 \\ 0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8 \end{cases}$, on utilisait en 2de l'**intervalle de fluctuation** simplifié $I_F = \left[\, p - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \,\right]$.
- Sous les conditions $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np \geqslant 5 \text{ et } n(1-p) \geqslant 5 \end{cases}$, on utilise en T^{ale} l'**intervalle de fluctuation asymptotique**

$$I_F = \left[\, p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,\right].$$

Remarque : Pour les sujets de bac, on utilise quasiment toujours l'intervalle de fluctuation asymptotique qui permet des probabilités qui peuvent être plus petites que 0,2 ou plus grandes que 0,8.

- **Décider ou non …**

si un objet aléatoire est truqué

- On nous donne un objet aléatoire quelconque : on doute du non truquage de cet objet…

si la caractéristique d'un échantillon est conforme à celle de la population

- On nous donne un échantillon quelconque extrait de cette population : on doute de la conformité de la représentation de la caractéristique dans cet échantillon…

Méthode commune aux deux situations :

- Repérer dans le texte
  - quel est le type d'objet aléatoire et quel évènement est étudié | quelle est la grande population et quelle caractéristique est étudiée
- Présenter sur la copie
  - la probabilité de l'évènement : c'est p | la proportion de cette caractéristique : c'est p
- Présenter sur la copie
  - l'échantillon réalisé avec l'objet aléatoire mis en doute, et sa taille n | l'échantillon extrait de la population et mis en doute, et sa taille n
- Vérifier les conditions $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np \geqslant 5 \text{ et } n(1-p) \geqslant 5 \end{cases}$ et en déduire le droit d'utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique I_F.
- Calculer les bornes $p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ (arrondie par défaut) et $p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ (arrondie par excès) de I_F.
- Calculer la fréquence f de l'évènement ou de la caractéristique dans l'échantillon (arrondie à 10^{-3} si non précisé).
- Si $f \notin I_F$, on conclut avec une prise de décision, modérée par un risque d'erreur de 5 % :

  « on décide que l'objet est truqué, avec un risque d'erreur de 5 % »

  « on décide que la représentation de la caractéristique de cet échantillon n'est pas conforme à la population, avec un risque d'erreur de 5 % »

- Si $f \in I_F$, on peut conclure avec une non prise de décision (inutile de modérer, il n'y a pas de prise de risque) :

« on ne décide pas que l'objet est truqué »	« on ne décide pas que la représentation de la caractéristique de cet échantillon n'est pas conforme à la population »

ou on peut conclure avec une prise de décision, modérée par un risque d'erreur non maîtrisé :

« on décide que l'objet n'est pas truqué, avec un risque d'erreur non maîtrisé »	« on décide que la représentation de la caractéristique de cet échantillon est conforme à la population, avec un risque d'erreur non maîtrisé »

Remarque : Souvent, la mise en doute d'un échantillon permet la mise en doute de l'appareil qui l'a créé.

Remarque : On rédige la conclusion en fonction de la question de l'énoncé.
Parfois, la question ne demande pas une vraie prise de décision.
Ainsi, à la question « Peut-on penser que l'objet est truqué ? », on répondra :
- « On peut penser que l'objet est truqué, avec un risque d'erreur de 5 %. » si $f \notin I_F$;
- « On peut penser que l'objet n'est pas truqué, avec un risque d'erreur non maîtrisé. » si $f \in I_F$.

On ne peut pas conclure avec une non prise de décision.

Remarque : Dans ces situations de base, p et l'intervalle de fluctuation qui en dépend sont officiellement (re)connus.
L'échantillon et la fréquence f qui en dépend sont mis en doute.

- **Décider ou non si une proportion annoncée ou supposée est correcte** *(situation statistique)*

⚠ Dans cette nouvelle situation, bien comprendre que les statuts de p et f sont inversés.

- Dans une grande population, on ne connaît pas la proportion p d'individus ayant une certaine caractéristique.
- Deux types d'exercices :
  Type 1 : la valeur de p est supposée (on fait une hypothèse sur sa valeur) ⟶ on veut **accepter ou rejeter cette hypothèse**,
  Type 2 : la valeur de p est annoncée par quelqu'un ⟶ **on met en doute cette affirmation**.
  On utilise un échantillon représentatif pour lequel la fréquence f sera donc conforme à celle de la population, au seuil 0,95.
- Même méthode que précédemment.
- Si $f \notin I_F$, on conclut avec une prise de décision, modérée par un risque d'erreur de 5 % :
  Type 1 : on rejette l'hypothèse de la valeur supposée de p, avec un risque d'erreur de 5 %.
  Type 2 : on décide que la valeur annoncée de p est fausse, avec un risque d'erreur de 5 %.
- Si $f \in I_F$, on peut conclure avec une non prise de décision (inutile de modérer) :
  Type 1 : on ne rejette pas l'hypothèse de la valeur supposée de p.
  Type 2 : on ne décide pas que la valeur annoncée de p est fausse.

  ou on peut conclure avec une prise de décision, modérée par un risque d'erreur non maîtrisé :
  Type 1 : on accepte l'hypothèse de la valeur supposée de p, avec un risque d'erreur non maîtrisé.
  Type 2 : on décide que la valeur annoncée de p est correcte, avec un risque d'erreur non maîtrisé.

Remarques sur les exercices

- L'exercice **1.** est une série de questions courtes où on parcourt toutes les situations et tous les cas possibles.
- Les exercices **2.** à **8.** sont des extraits courts de types Bac.
  Les exercices **9.** et **10.** sont des exercice de bac complets, qui révisent d'autres parties des probabilités.

---

1. **1.1.** Une caractéristique est présente chez 12 % des individus d'une population.
Dans un échantillon de 500 individus, cette caractéristique est présente chez 61 individus.
Peut-on penser que cette caractéristique est sur-représentée dans cet échantillon ?

1.2. Une caractéristique est présente chez 97,5 % des individus d'une population.
Dans un échantillon de 1 200 individus, cette caractéristique est présente chez 1 145 individus.
Pour cette caractéristique, cet échantillon est-il représentatif de la population ?

1.3. On lance un dé 200 fois.
On obtient 47 fois le nombre 6.
Y a-t-il des raisons de croire ce dé truqué ?

1.4. Dans un jeu, un sac opaque contient des boules indiscernables au toucher.
20 boules blanches permettent de jouer, et 5 boules rouges obligent à passer son tour.
Un candidat a pioché 65 fois a n'a pioché que 8 fois une boule rouge.
Peut-on soupçonner que ce candidat a trouvé un moyen d'éviter les boules rouges ?

1.5. Un archer annonce qu'il touche la cible avec une probabilité de 0,92.
Au cours du mois, il a tiré un total de 350 flèches et a touché la cible 315 fois.
Que peut-on penser de la probabilité annoncée ?

1.6. Une machine fabrique des objets.
Elle devrait être réglée pour ne fabriquer que 3 % d'objets défectueux.
On prélève 2 000 objets à la sortie de cette machine, 82 sont défectueux.
Le réglage de la machine a-t-il été bien fait ?

---

2. *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. On ne demande pas de justification.*

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 100 fois de suite.
Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile de cette pièce ?

a. [0,371 ; 0,637]

b. [0,480 ; 0,523]

c. [0,402 ; 0,598]

d. [0,412 ; 0,695]

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2015

---

3. Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être commercialisables, ces pains doivent peser au moins 385 grammes.
La méthode de production a été optimisée dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.

b) Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question *a)*, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2013

---

4. Une entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production.
Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

a) Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

b) A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

D'après Baccalauréat Antilles 2016

5. Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.
L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :
30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.
Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son lecteur MP3,
60 morceaux de musique.

a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % de la proportion de morceaux de musique
classique dans un échantillon de taille 60.

b) Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage.
Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

D'après Baccalauréat Polynésie 2013

---

6. Un fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme* qu'il produit, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production.
Le responsable d'un magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.

Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?
On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

D'après Baccalauréat Centres Étrangers 2015

---

7. À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».
Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.
On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.
On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant
aucune trace de pesticides.

a) Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

b) L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?

D'après Baccalauréat Asie 2013

---

8. Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés.
Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.
Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.
Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.
De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

a) Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

b) Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

c) Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €.
Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.
Ses doutes sont-ils justifiés ?

D'après Baccalauréat Centres Étrangers 2015

---

9. Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40% des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25% des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x
est un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

a) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b) Déterminer la valeur exacte de x.

c) Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

a) Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.

b) Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.

b) Que penser de l'affirmation du fournisseur ?

D'après Baccalauréat Antilles Septembre 2015

---

10. Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :
M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »
C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

a) 1) Montrer que $P(M \cap C) = 0,03$.

2) Calculer $P(C)$.

b) On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.
Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.
On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

a) Définir la loi de la variable aléatoire X .

b) Déterminer $P(X = 35)$.

c) Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Partie C

a) On considère la variable aléatoire F , définie par $F = \dfrac{X}{400}$, X étant la variable aléatoire de la partie B.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

b) Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.
Qu'en pensez-vous ?

D'après Baccalauréat Amérique du Sud 2013