Correction de T^{ale} S - PROBABILITÉS - Fiche 4

1. **1.1.** Situation statistique :

- La proportion de cette caractéristique dans la population est $p = 0{,}12$.
- On a prélevé un échantillon de taille $n = 500$.
- $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np = 500 \times 0{,}12 = 60 \geqslant 5 \\ n(1-p) = 500 \times 0{,}88 = 440 \geqslant 5 \end{cases}$
  donc les conditions sont respectées pour utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.
- Ses bornes sont
  $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}12 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}12\times 0{,}82}}{\sqrt{500}} \approx 0{,}091$ arrondie par défaut
  $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}12 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}12\times 0{,}82}}{\sqrt{500}} \approx 0{,}149$ arrondie par excès
- La fréquence de la caractéristique dans cet échantillon est $f = \dfrac{61}{500} = 0{,}122$.
- $f \in [\ 0{,}091\ ;\ 0{,}149\ ]$

Conclusion prudente : donc on ne décide pas que cette caractéristique est sur-représentée.

Ou conclusion avec risque : donc on décide que cette caractéristique n'est pas sur-représentée, avec un risque non maîtrisé.

Comme l'énoncé nous demande si <u>on peut penser</u>, on peut aussi répondre : donc on peut penser que cette caractéristique n'est pas sur-représentée, avec un risque non maîtrisé.

1.2. Situation statistique :

- La proportion de cette caractéristique dans la population est $p = 0{,}975$.
- On a prélevé un échantillon de taille $n = 1\,200$.
- $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np = 1\,200 \times 0{,}975 = 1\,170 \geqslant 5 \\ n(1-p) = 1\,200 \times 0{,}025 = 30 \geqslant 5 \end{cases}$
  donc les conditions sont respectées pour utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.
- Ses bornes sont
  $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}975 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}975\times 0{,}025}}{\sqrt{1\,200}} \approx 0{,}966$ arrondie par défaut
  $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}975 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}975\times 0{,}025}}{\sqrt{1\,200}} \approx 0{,}984$ arrondie par excès
- La fréquence de la caractéristique dans cet échantillon est $f = \dfrac{1\,145}{1\,200} \approx 0{,}954$.
- $f \notin [\ 0{,}966\ ;\ 0{,}984\ ]$
  donc on décide que cet échantillon n'est pas représentatif, avec un risque d'erreur de 5 %.

1.3. Situation probabiliste :

- La probabilité d'avoir le nombre 6 avec un dé non truqué est $p = \dfrac{1}{6}$.
- Les 200 lancers constituent un échantillon de taille $n = 200$.
- $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np = 200 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{100}{3} \geqslant 5 \\ n(1-p) = 200 \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{500}{3} \geqslant 5 \end{cases}$
  donc les conditions sont respectées pour utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.
- Ses bornes sont
  $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{6} - 1{,}96\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}}}{\sqrt{200}} \approx 0{,}115$ arrondie par défaut
  $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{6} + 1{,}96\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}}}{\sqrt{200}} \approx 0{,}218$ arrondie par excès
- La fréquence des nombres 6 dans cet échantillon est $f = \dfrac{47}{200} = 0{,}235$.
- $f \notin [\ 0{,}115\ ;\ 0{,}218\ ]$
  donc, il y a des raisons de croire que ce dé est truqué, avec un risque de 5 %.

1.4. Situation probabiliste :

- La probabilité de piocher une boule rouge est $p = \dfrac{5}{25} = 0{,}2$.
- Les 65 boules piochées par le candidat constituent un échantillon de taille $n = 65$.
- $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np = 65 \times 0{,}2 = 13 \geqslant 5 \\ n(1-p) = 65 \times 0{,}8 = 52 \geqslant 5 \end{cases}$
  donc les conditions sont respectées pour utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.
- Ses bornes sont
  $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}2 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}2\times0{,}8}}{\sqrt{65}} \approx 0{,}102$ arrondie par défaut
  $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}2 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}2\times0{,}8}}{\sqrt{65}} \approx 0{,}298$ arrondie par excès
- La fréquence des boules rouges piochées dans cet échantillon est $f = \dfrac{8}{65} \approx 0{,}076$.
- $f \notin [\ 0{,}102\ ;\ 0{,}298\ ]$
  donc, on peut soupçonner que ce candidat a trouvé un moyen d'éviter les boules rouges, avec un risque de 5 %.

1.5. On a ici une probabilité annoncée qui est mise en doute :

- La probabilité annoncée par l'archer de toucher la cible est $p = 0{,}92$.
- Les 350 flèches tirées constituent un échantillon de taille $n = 350$.
- $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np = 350 \times 0{,}92 = 322 \geqslant 5 \\ n(1-p) = 350 \times 0{,}92 = 28 \geqslant 5 \end{cases}$
  donc les conditions sont respectées pour utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.
- Ses bornes sont
  $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}92 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}92\times0{,}08}}{\sqrt{350}} \approx 0{,}891$ arrondie par défaut
  $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}92 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}92\times0{,}08}}{\sqrt{350}} \approx 0{,}949$ arrondie par excès
- La fréquence des balles lancées à droite dans cet échantillon est $f = \dfrac{315}{350} = 0{,}9$.
- $f \in [\ 0{,}891\ ;\ 0{,}949\ ]$
  donc, on peut penser que la probabilité annoncée est correcte, avec un risque non maîtrisé.

1.6. On a ici une proportion supposée qui est à vérifier :

- La proportion supposée des objets défectueux est $p = 0{,}03$.
- Le prélèvement constitue un échantillon de taille $n = 2\ 000$.
- $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np = 2\ 000 \times 0{,}03 = 60 \geqslant 5 \\ n(1-p) = 2\ 000 \times 0{,}03 = 1\ 940 \geqslant 5 \end{cases}$
  donc les conditions sont respectées pour utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.
- Ses bornes sont
  $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}03 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}03\times0{,}97}}{\sqrt{2\ 000}} \approx 0{,}022$ arrondie par défaut
  $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}03 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}03\times0{,}97}}{\sqrt{2\ 000}} \approx 0{,}038$ arrondie par excès
- La fréquence des balles lancées à droite dans cet échantillon est $f = \dfrac{82}{2\ 000} = 0{,}041$.
- $f \notin [\ 0{,}022\ ;\ 0{,}038\ ]$
  donc, on décide que le réglage de la machine n'a pas été bien fait, avec un risque d'erreur de 5 %.

2.

- La probabilité de faire pile est $p = 0{,}5$.
- On a constitué un échantillon de taille $n = 100$.
- Inutile de vérifier les conditions !
- Les bornes sont

$$p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}5 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}5\times0{,}5}}{\sqrt{100}} = 0{,}402$$

$$p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}5 +- 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}5\times0{,}5}}{\sqrt{100}} = 0{,}598$$

Réponse **c.**

---

3. ***a)***

- La proportion supposée de pains commercialisables est $p = 0{,}96$.
- On a constitué un échantillon de taille $n = 300$.
- $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np = 300 \times 0{,}96 = 288 \geqslant 5 \\ n(1-p) = 300 \times 0{,}04 = 12 \geqslant 5 \end{cases}$

  donc les conditions sont respectées pour utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.
- Ses bornes sont

$$p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}96 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}96\times0{,}04}}{\sqrt{300}} \approx 0{,}937 \text{ arrondie par défaut}$$

$$p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}96 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}96\times0{,}04}}{\sqrt{300}} \approx 0{,}983 \text{ arrondie par excès}$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 est donc [0,937 ; 0,983] .

b)

- La fréquence des pains commercialisables dans cet échantillon est $f = \frac{283}{300} \approx 0{,}943$.
- $f \in [\ 0{,}937 \ ;\ 0{,}983\ ]$

Ou conclusion avec risque : donc, on peut décider que l'objectif a été atteint, avec un risque d'erreur non maîtrisé.

La conclusion prudente « donc on ne décide pas que l'objectif n'a pas été atteint. » ne répond pas correctement à la question posée.

---

4. ***a)***

- La proportion annoncée d'ampoules défectueuses est $p = 0{,}06$.
- On a constitué un échantillon de taille $n = 1\,000$.
- $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np = 1\,000 \times 0{,}06 = 60 \geqslant 5 \\ n(1-p) = 1\,000 \times 0{,}94 = 940 \geqslant 5 \end{cases}$

  donc les conditions sont respectées pour utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.
- Ses bornes sont

$$p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}06 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}06\times0{,}94}}{\sqrt{1\,000}} \approx 0{,}045 \text{ arrondie par défaut}$$

$$p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}06 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}06\times0{,}94}}{\sqrt{1\,000}} \approx 0{,}075 \text{ arrondie par excès}$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 est donc [0,045 ; 0,075] .

b)

- La fréquence d'ampoules défectueuses dans cet échantillon est $f = \frac{71}{1\,000} \approx 0{,}071$.
- $f \in [\ 0{,}045 \ ;\ 0{,}075\ ]$

  donc, on n'a pas de raison de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise, avec un risque d'erreur non maîtrisé.

---

5. ***a)***

- La proportion de morceaux de musique classique est $p = 0{,}3$.
- On a un échantillon de taille $n = 60$.
- $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np = 60 \times 0{,}3 = 18 \geqslant 5 \\ n(1-p) = 60 \times 0{,}7 = 42 \geqslant 5 \end{cases}$

  donc les conditions sont respectées pour utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.

La proportion 0,3 et la taille 60 satisfont à l'intervalle de fluctuation $\left[\ p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\ \right]$ de Seconde puisque $0{,}2 \leqslant 0{,}3 \leqslant 0{,}8$ et $60 \geqslant 25$,

mais on vous oblige à utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.

- Ses bornes sont

$$p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}3 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}3\times0{,}7}}{\sqrt{60}} \approx 0{,}184 \text{ arrondie par défaut}$$

$$p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}3 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}3\times0{,}7}}{\sqrt{60}} \approx 0{,}416 \text{ arrondie par excès}$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 est donc [0,184 ; 0,416] .

b)

- La fréquence de morceaux de musique classique dans l'échantillon est $f = \frac{12}{60} = 0{,}2$.
- $f \in [\ 0{,}184 \ ;\ 0{,}416\ ]$

  donc, on peut penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas n'est pas défectueuse, avec un risque d'erreur non maîtrisé.