Savoir CALCULER DES PROBABILITÉS DANS UNE SUCCESSION D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES, UTILISER UN SCHÉMA DE BERNOULLI, LA LOI BINOMIALE

Ce que je dois avoir compris

- **Quand il y a indépendance entre une 1ère épreuve aléatoire et une 2ème, voire une 3ème**
- **Que les épreuves indépendantes successives peuvent être...**

différentes →
Exemple type : On pioche dans une urne, puis on pioche dans une autre urne.
Exemple type : On pioche dans une urne, puis on tourne une roue, puis on lance un dé.
Exemple type : On interroge dans une population, puis on interroge dans une autre population.

ou identiques →
Exemple type : On pioche dans une urne avec remise, puis on re-pioche dans la même urne.
Exemple type : On lance un dé, puis on relance le même dé.
Exemple type très classique : On interroge 10 personnes dans une très grande population.
C'est 10 fois « interroger une personne », avec indépendance grâce à la très grande population.

On parle alors de **répétitions** d'épreuves indépendantes identiques.

- **Que les évènements sont des couples, des triplets, des *n*-uplets**

La 1ère épreuve aléatoire est associée à un univers Ω_1, la 2ème est associée à un univers Ω_2, etc...
Les évènements sont des éléments du produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times ...$

Remarque : Pour une succession d'**épreuves différentes**, on a en général deux ou trois univers, rarement plus.

Remarque : Pour une répétition d'**épreuves identiques**, c'est un produit cartésien du même univers, de la forme Ω^n.
Et le nombre n de répétitions peut être quelconque.

Ce que je dois savoir faire

- **Représenter la situation par un arbre pondéré**
  - Branches primaires pour la 1ère épreuve, branches secondaires pour la 2ème épreuve, etc...
  - Pas de probabilités conditionnelles : les probabilités sont toutes simples.

- Pour une succession d'**épreuves différentes**, **calculer la probabilité d'un couple, d'un triplet**
  - Appliquer le principe multiplicatif : $P((A\,;B)) = P(A) \times P(B)$
    $P((A\,;B\,;C)) = P(A) \times P(B) \times P(C)$
  - Appliquer le principe additif :
    la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des couples (ou triplets) favorables à cet évènement.

- Pour une répétition d'**épreuves identiques**, **justifier un schéma de Bernoulli, une loi binomiale**

À partir d'un texte, plus ou moins long, qui présente une situation :

1) Rédiger la présence d'une épreuve de Bernoulli en montrant :
   - qu'il y a deux issues (ou qu'il peut arriver deux choses),
   - qu'on connaît la probabilité p de l'une des deux (le succès),
   - que c'est donc une épreuve de Bernoulli.

   Pour repérer qui joue le rôle de succès :
   - si l'énoncé me donne une variable aléatoire X, les succès seront ce qu'elle compte,
   - sinon, je regarde dans la consigne de quoi je dois calculer la probabilité.

2) Rédiger la présence d'un schéma de Bernoulli en montrant :
   - que cette épreuve est répétée un certain nombre n de fois,
   - que les répétitions se font de manière indépendante en le justifiant avec l'énoncé :
     - qui me dit clairement que c'est indépendant,
     - qui me dit que c'est un tirage avec remise,
     - qui me dit que c'est une situation analogue à un tirage avec remise,
   - que c'est donc un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

3) En déduire que la variable aléatoire qui compte les succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.
   Si l'énoncé ne présente pas de variable aléatoire, je dois le faire moi-même.
   Ça me permettra d'utiliser les notations $P(X\ ...)$.

- **Utiliser la calculatrice pour calculer une probabilité lorsqu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$**

  - Pour un calcul du type $P(X=k)$: - montrer la formule $\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$,
    - simplifier les puissances et remplacer $\binom{n}{k}$ par $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.
    - donner l'arrondi s'il est demandé.
  - Pour un calcul du type $P(X \leqslant k)$ ou $P(X \geqslant k)$, décomposer en somme :
    Par exemple : $P(X \leqslant 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$
    $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$
    $P(X > 18) = P(X=19) + P(X=20)$ pour $n=20$.
  - Dans les autres cas, on trouve un arrondi à la calculatrice.
    Toutes les calculatrices ont un menu pour calculer $P(X=k)$.
    Certaines calculatrices ont un menu pour $P(X \leqslant k)$, un menu pour $P(X \geqslant k)$ et un menu pour $P(k_1 \leqslant X \leqslant k_2)$.
    Mais certaines ne savent calculer que $P(X \leqslant k)$:
    Par exemple, pour $n=20$: $P(X \geqslant 15)$ se calcule avec $1 - P(X \leqslant 14)$
    $P(8 \leqslant X \leqslant 15)$ se calcule avec $P(X \leqslant 15) - P(X \leqslant 7)$.
    Et certaines ne savent calculer que $P(k_1 \leqslant X \leqslant k_2)$:
    Par exemple, pour $n=20$: $P(X \leqslant 15)$ se calcule avec $P(0 \leqslant X \leqslant 15)$
    $P(X \geqslant 15)$ se calcule avec $P(15 \leqslant X \leqslant 20)$.

  Remarque : Ne confondez pas : - « *avoir au moins k succès* » qui correspond à $P(X \geqslant k)$,
  - « *avoir moins de k succès* » qui correspond à $P(X < k)$ et donc à $P(X \leqslant k-1)$,
  - « *avoir au plus k succès* » qui correspond à $P(X \leqslant k)$,
  - « *avoir plus de k succès* » qui correspond à $P(X > k)$ et donc à $P(X \geqslant k+1)$.

  Remarque : SI l'énoncé ne demande pas une certaine précision, arrondissez à 10^{-3}.

- **Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire**

  Il s'agit de présenter un tableau associant toutes les issues possibles à leur probabilité.

Issues	$X=0$	$X=1$	---	$X=n$
Probabilités	...	...	---	...

- **Calculer l'espérance d'une variable aléatoire**

  - On rappelle la formule $\mathrm{E}(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + \ldots + n \times P(X=n)$.
  - Dans le cas d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, on a $\mathrm{E}(X) = np$.
  - Deux interprétations possibles : - c'est la valeur moyenne que peut prendre X à chaque essai,
    - c'est la valeur abstraite qu'on peut espérer obtenir en un essai.

Remarques sur les exercices

- L'exercice ① est purement technique, pour travailler les calculs avec une loi binomiale.
- L'exercice ② permet de différencier plusieurs situations élémentaires classiques. Attention, elles ne sont pas toutes des situations d'indépendance.
- Les exercices ③ à ⑥ sont des petits problèmes classiques ne présentant pas de difficulté.
- Les exercices ⑦ à ⑨ font intervenir un paramètre.
- Les exercices ⑩ et ⑪ sont des gros problèmes mélangeant plusieurs thèmes.
- L'exercice ⑫ est un problème original.

---

① On définit les variables aléatoires X qui suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\dfrac{3}{4}$ et Y qui compte des succès et qui suit une loi binomiale de paramètres $n=12$ et $p=0{,}68$.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.
On donnera les valeurs exactes des probabilités.

Dans la suite, on donnera les valeurs arrondies à 10^{-4}.

b. Calculer $P(Y=7)$.

c. Calculer $P(Y=12)$.

d. Calculer $P(\, Y \geqslant 11\,)$.

e. Calculer la probabilité d'avoir moins de trois succès.

f. Calculer la probabilité d'avoir moins de dix succès.

g. Calculer la probabilité d'avoir deux succès ou plus.

---

② On dispose d'un paquet de 32 cartes et d'une urne contenant 10 boules bleues et 40 boules rouges.

1. Un premier jeu consiste à piocher au hasard une carte puis une boule.
On gagne si on a pioché un cœur ou une boule bleue.
Représenter la situation par un arbre pondéré puis calculer la probabilité de gagner.

2. Un deuxième jeu consiste à piocher au hasard une carte, la mettre de côté, puis piocher une autre carte.
On gagne si on a pioché exactement un cœur.
Représenter la situation par un arbre pondéré puis calculer la probabilité de gagner.

3. Un troisième jeu consiste à piocher au hasard une boule, noter sa couleur, la remettre dans l'urne, puis piocher de nouveau au hasard une boule.
On gagne si on a pioché au moins une boule bleue.
Représenter la situation par un arbre pondéré puis calculer la probabilité de gagner.

4. Un quatrième jeu consiste à piocher une carte quatre fois de suite avec remise.
On gagne si on a pioché deux cœurs.
Calculer la probabilité de gagner.
On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie à 10^{-3}.
On posera une variable aléatoire qui compte le nombre de cartes de cœur et on précisera la loi suivie par cette variable aléatoire.

5. Un cinquième jeu consiste à piocher une carte dix fois de suite avec remise.
On gagne si on a pioché au moins trois cœurs.
Calculer la probabilité de gagner, arrondie à 10^{-3}.

6. On propose ici une situation hors du cadre de cette fiche mais qui fait le lien avec la combinatoire.

Un sixième jeu consiste à piocher cinq cartes simultanément.

a. Calculer le nombre d'issues possibles.

b. On gagne si on a pioché exactement deux cœurs.
Calculer la probabilité de gagner.
On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie à 10^{-3}.

---

③ Sur un trajet quotidien, une automobile doit passer trois feux tricolores. Les trois feux sont numérotés 1, 2 et 3 et ont respectivement une probabilité de 0,45, de 0,55 et de 0,80 d'être verts. Les feux ne sont pas coordonnés : ils sont donc indépendants les uns des autres.
On note A_i l'événement « l'automobile s'arrête au feu numéro i » pour i valant 1, 2 ou 3 et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'automobile doit s'arrêter.

1. a. Construire un arbre pondéré représentant la situation étudiée en utilisant les trois évènements A_i .

b. Modéliser les arrêts possibles sur le trajet par le produit cartésien de trois univers.
Combien compte-t-on d'issues ?

2. Quelle est la probabilité que l'automobile doive s'arrêter deux fois sur son trajet ?
On rappelle que l'on s'arrête si le feu est orange ou rouge.

3. Déterminer la probabilité que l'automobile ne s'arrête à aucun feu.

4. a. Dresser un tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

b. Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

④ Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez un fournisseur dont 12 % des boîtes présentent des traces de pesticides. Le gérant d'un salon de thé achète un lot de 10 boîtes de thé chez ce grossiste précédent.
On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe, à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.
Les probabilités seront arrondies au centième.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

c. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

d. Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

D'après Baccalauréat Asie 2013

---

⑤ Pour embaucher ses cadres, une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement.
La procédure retenue est la suivante :

- le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier ; 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise ;
- les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus ;
- ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

a. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
Montrer que la probabilité que le candidat soit recruté est égale à 0,07.

b. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise.
Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

D'après Baccalauréat Métropole 2012

---

⑥ Une jardinerie offre en cadeau de jeunes plants d'arbres qui proviennent d'un stock comportant 47,5 % d'arbres à feuilles, le reste étant composé de conifères.
On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie.
On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

a. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à 10^{-3}.

b. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ? On arrondira à 10^{-3}.

D'après Baccalauréat Métropole 2013

---

⑦ On dispose d'une urne qui contient trois boules noires et cinq boules rouges.
Une partie consiste à piocher une boule.
On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire.
Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties.
On donnera le résultat arrondi au millième.

b. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie.
On donnera le résultat arrondi au millième.

c. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,0091	0,0637	0,2110	0,4467	0,6943	0,8725	0,9616	0,9922	0,9990	0,9999

Soit N un entier compris entre 1 et 10.
On considère l'évènement : « La personne gagne au moins N parties ».
Utiliser le tableau pour déterminer à partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à 0,1 ?

D'après Baccalauréat Nouvelle Calédonie Mars 2012

⑧ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Une urne contient quatre boules rouges et n boules noires indiscernables au toucher.
On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.
La variable aléatoire X donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages suit la loi binomiale de paramètres 4 et p.

a. Donner l'expression de p en fonction de n.

b. On note q_n la probabilité que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire.
Démontrer que $q_n = 1 - \left(\dfrac{4}{n+4}\right)^n$.

c. Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à 0,999 9 ?

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2012

---

⑨ Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.
Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

a. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
Montrer que, pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - 0{,}7^n$.

D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2012

---

⑩ Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible; elle doit être renouvelée chaque année.

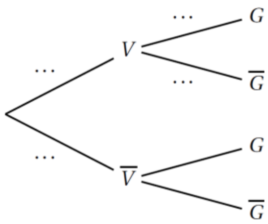
Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :
- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :
V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;
G : « la personne a contracté la grippe ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'évènement G.

b. Reproduire l'arbre pondéré ci-contre et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.
Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.
Après la période hivernale, on interroge au hasard 40 habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à 40 tirages successifs indépendants et avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. **a.** Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

D'après Baccalauréat S Métropole 2018

⑪ Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si sa réponse est fausse.

On considère trois candidats :

- Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions. Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est égale à $\frac{1}{4}$;
- Barbara est un peu mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{1}{2}$;
- Camille fait encore mieux : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$.

1. On note X, Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

b. À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X > 10)$.

c. À l'aide de la calculatrice, donner sans justification les arrondis au millième des probabilités $P(Y > 10)$ et $P(Z > 10)$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.
On note A, B, C et M les évènements :

- A : « la copie choisie est celle d'Anselme » ;
- B : « la copie choisie est celle de Barbara » ;
- C : « la copie choisie est celle de Camille » ;
- M : « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 ».

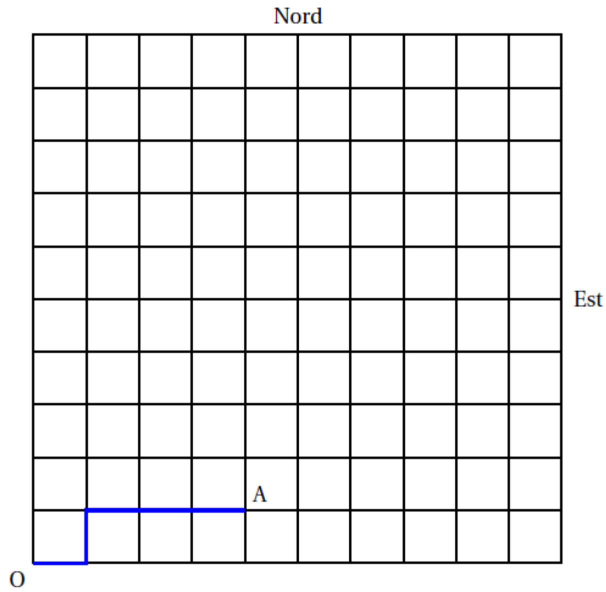
On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara?
On donnera l'arrondi au millième de cette probabilité.

D'après Baccalauréat S Nouvelle Calédonie Novembre 2018

---

⑫ Les rues d'une ville nouvelle sont structurées de telle sorte que les pâtés de maisons sont des carrés superposables et les rues sont toutes parallèles ou perpendiculaires.
On identifie le plan de la ville au quadrillage d'un carré de 10 unités sur 10 dans lequel on se repère avec des points à coordonnées entières qui correspondent aux carrefours :



Le point O a pour coordonnées $(0 ; 0)$, le point A a pour coordonnées $(4 ; 1)$.
On s'intéresse aux chemins partant de O et arrivant à un autre point M de coordonnées $(p ; q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$.
À chaque intersection, on ne peut aller que vers le nord (N) ou vers l'est (E).
Dans tout l'exercice, on décrit un chemin à l'aide d'un mot composé successivement des lettres N ou E qui indiquent dans l'ordre la direction à suivre à chaque intersection.
On appelle *longueur* d'un chemin le nombre de lettres employées pour le décrire.

Par exemple :

Pour se rendre en A , on peut suivre par exemple les chemins NEEEE ou ENEEE (marqué en bleu sur la figure) ; ces deux chemins ont une longueur égale à 5.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A - Dénombrement

a. Donner la liste de tous les chemins permettant de se rendre en A.

b. Soit M un point de coordonnées $(p\,;q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$.
Exprimer, en fonction de p et q, la longueur des chemins qui permettent d'arriver en M .

c. Montrer qu'il y a $\binom{p+q}{p}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M .

d. Dénombrer les chemins pour arriver au point C de coordonnées $(7\,;5)$.

e. Dénombrer les chemins pour arriver en C en passant par A .

Partie B - Étude d'une variable aléatoire

Tous les chemins considérés dans la suite de l'exercice vérifient les deux propriétés suivantes :

- ils sont de longueur 5 ;
- un promeneur part de O et, à chaque intersection, la probabilité qu'il aille vers le Nord est de 2/3 (et donc de 1/3 vers l'Est), indépendamment de son choix précédent.

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout chemin suivi par le promeneur, associe le nombre de fois où il va vers le Nord.

a. Énumérer, en donnant la liste de leurs coordonnées, tous les points sur lesquels peut aboutir un chemin.

b. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

c. Calculer la probabilité que le promeneur arrive en A .

D'après Baccalauréat Antilles Septembre 2012