Correction de **PROBABILITÉS - Fiche 2**

① **a.** X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3 et 4 .

$$P(X=0) = \binom{4}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 1 \times 1 \times \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4^3} = \frac{3}{64}$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 6 \times \frac{3^2}{4^2} \times \frac{1}{4^2} = \frac{27}{128}$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 4 \times \frac{3^3}{4^3} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$$

$$P(X=4) = \binom{4}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{3^4}{4^4} \times 1 = \frac{81}{256}$$

La loi de probabilité est donc :

Issues	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
Probabilités	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

b. $P(X=7) = \binom{12}{7} 0{,}68^7 \times (1-0{,}68)^5$ → *Je montre la formule.*

$\approx 0{,}17866$, arrondi à 10^{-5} → *Je trouve l'arrondi directement à la calculatrice.*

c. $P(X=12) = \binom{12}{12} 0{,}68^{12} \times (1-0{,}68)^0$

$= 0{,}68^{12}$ → *La forme exacte est très simple, je la montre.*

$\approx 0{,}00976$, arrondi à 10^{-5}

d. $P(X \geqslant 11) = P(X=11) + P(X=12)$ → *Je décompose en somme de probabilités simples.*

$= \binom{12}{11} 0{,}68^{11} \times (1-0{,}68)^1 + 0{,}68^{12}$ → *Je peux montrer de nouveau la formule.*

$\approx 0{,}06497$, arrondi à 10^{-5}

e. $P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= (1-0{,}68)^{12} + \binom{12}{1} 0{,}68^1 \times (1-0{,}68)^{11} + \binom{12}{2} 0{,}68^2 \times (1-0{,}68)^{10}$ → *Oui, c'est un peu lourd…*

$\approx 0{,}00037$, arrondi à 10^{-5}

f. $P(X<10) = 1 - P(X \geqslant 10)$

$= 1 - P(X=10) - P(X=11) - P(X=12)$

$= 1 - \binom{12}{10} 0{,}68^{10} \times (1-0{,}68)^2 - P(X=11) - P(X=12)$ → *On a déjà donné les formules de* $P(X=11)$ *et* $P(X=12)$.

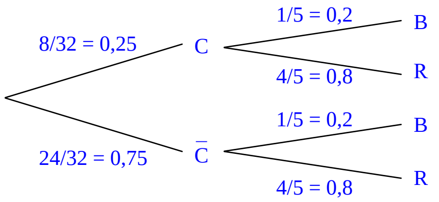
$\approx 0{,}79216$, arrondi à 10^{-5}

g. $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X<2)$

$= 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$\approx 0{,}99997$, arrondi à 10^{-5}

② **1.** *Les deux épreuves sont indépendantes puisqu'on pioche dans deux univers distincts.*



→ $P((C;B)) = 0{,}25 \times 0{,}2 = 0{,}05$

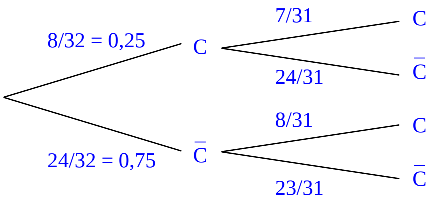
→ $P((C;R)) = 0{,}25 \times 0{,}8 = 0{,}2$

→ $P((\overline{C};B)) = 0{,}75 \times 0{,}2 = 0{,}15$

→ $P((\overline{C};R)) = 0{,}75 \times 0{,}8 = 0{,}6$

Les couples favorables à l'évènement « *piocher un cœur ou une boule bleue* » sont $(C;B)$, $(C;R)$ et $(\overline{C};B)$.
Donc, la probabilité de gagner est $0{,}05 + 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}4$.

2. Les deux épreuves ne sont pas indépendantes puisqu'on pioche deux fois sans remise.



$\rightarrow P(\,(C\,;C\,)\,) = 0{,}25 \times \dfrac{7}{31} = \dfrac{7}{124}$

$\rightarrow P(\,(C\,;\overline{C}\,)\,) = 0{,}25 \times \dfrac{24}{31} = \dfrac{6}{31}$

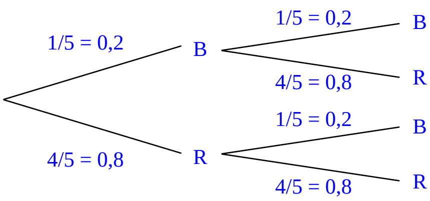
$\rightarrow P(\,(\overline{C}\,;C\,)\,) = 0{,}75 \times \dfrac{8}{31} = \dfrac{6}{31}$

$\rightarrow P(\,(\overline{C}\,;\overline{C}\,)\,) = 0{,}75 \times \dfrac{23}{31} = \dfrac{69}{124}$

Les couples favorables à l'évènement « *piocher exactement un cœur* » sont $(\,C\,;\overline{C}\,)$ et $(\,\overline{C}\,;C\,)$.

Donc, la probabilité de gagner est $2\times\dfrac{6}{31} = \dfrac{12}{31}$.

3. Les deux épreuves sont indépendantes puisqu'on pioche avec remise.



$\rightarrow P(\,(B\,;B\,)\,) = 0{,}2^{\,2} = 0{,}04$

$\rightarrow P(\,(B\,;R\,)\,) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$

$\rightarrow P(\,(R\,;B\,)\,) = 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}16$

$\rightarrow P(\,(R\,;R\,)\,) = 0{,}8^{\,2} = 0{,}64$

Les couples favorables à l'évènement « *piocher au moins une boule bleue* » sont $(\,B\,;B\,)$, $(\,B\,;R\,)$ et $(\,R\,;B\,)$.
Donc, la probabilité de gagner est $0{,}04 + 2\times 0{,}16 = 0{,}36$.

4. Les quatre épreuves sont indépendantes puisqu'on pioche avec remise.
On ne demande plus l'arbre, et heureusement car il serait fastidieux...
Mais il faut soigneusement rédiger.
Les mots-clés sont en noir :

Une carte piochée est **soit** un cœur, avec une **probabilité** $p = 0{,}25$, **soit** pas un cœur. → Deux issues, dont « cœur » est le succès.
Donc, c'est une **épreuve de Bernoulli**. → « épreuve de Bernoulli ».
On pioche 4 fois avec remise, → Cause de l'indépendance des répétitions.
donc l'épreuve de Bernoulli est **répétée** 4 **fois** → Répétitions.
de manière indépendante → Indépendance.
donc, c'est une **schéma de Bernoulli** de **paramètres** $n = 4$ et $p = 0{,}25$ → « schéma de Bernoulli ».
donc, la variable aléatoire X qui compte le nombre de cœurs → Je pose la variable aléatoire qui compte les succès.
suit la **loi binomiale** de **paramètres** $n = 4$ et $p = 0{,}25$. → « loi binomiale » avec les paramètres.

donc la probabilité de gagner est
$$\begin{aligned} P(\,X = 2\,) &= \binom{4}{2} 0{,}25^{\,2} \times (\,1 - 0{,}25\,)^{\,4-2} \\ &= \frac{4\times 3}{2\times 1} \times 0{,}25^{\,2} \times 0{,}75^{\,2} \\ &= 6 \times 0{,}0625 \times 0{,}5625 \\ &= 0{,}2109375 \\ &\approx 0{,}211 \text{ arrondi à } 10^{-3} \end{aligned}$$

→ On pouvait tout faire en fractions et trouver $\dfrac{27}{128}$.

5. Même rédaction qu'au **4.** .

Une carte piochée est soit un cœur, avec une probabilité $p = 0{,}25$, soit pas un cœur.
Donc, c'est une épreuve de Bernoulli.
On pioche 10 fois avec remise, donc l'épreuve de Bernoulli est répétée 10 fois de manière indépendante
donc, c'est une schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}25$
donc, la variable aléatoire X qui compte le nombre de cœurs suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}25$.

donc la probabilité de gagner est $P(\,X \geqslant 3\,) \approx 0{,}474$ arrondi à 10^{-3} à la calculatrice → « au moins trois cœurs » se traduit par $X \geqslant 3$.

L'énoncé demande un arrondi.
Ça tombe bien car l'écriture exacte aurait un peu longue à écrire :

$$\begin{aligned} P(\,X \geqslant 3\,) &= 1 - P(\,X = 0\,) - P(\,X = 1\,) - P(\,X = 2\,) \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0{,}25^{\,0} \times (\,1 - 0{,}25\,)^{\,10-0} - \binom{10}{1} 0{,}25^{\,1} \times (\,1 - 0{,}25\,)^{\,10-1} - \binom{10}{2} 0{,}25^{\,2} \times (\,1 - 0{,}25\,)^{\,10-2} \end{aligned}$$

6. **a.** On doit reconnaître un tirage de 5 parmi 32 sans ordre et sans remise.

Dans l'ensemble des 32 cartes, les 5 cartes piochées simultanément forment une 5-combinaison.

Le nombre d'issues possibles est donc $\dbinom{32}{5} = \dfrac{32\times 31\times 30\times 29\times 28\times 27}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 201\ 376$.

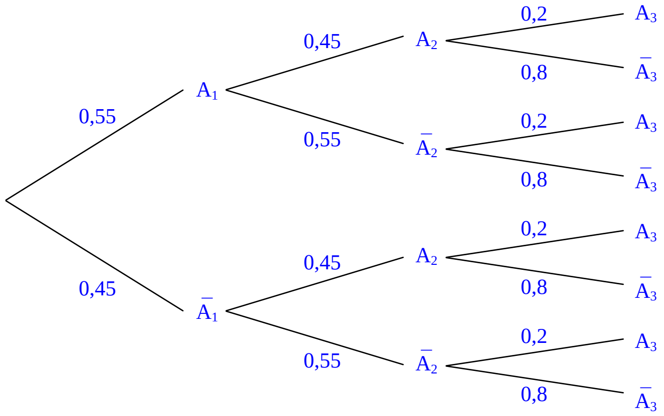
b. Une issue favorable est composée de 2 cœurs et 3 non cœurs.
Dans l'ensemble des 8 cœurs, les 2 piochés simultanément forment une 2-combinaison.
Et dans l'ensemble des 24 non cœurs, les 3 piochés simultanément forment une 3-combinaison.

Le nombre d'issues favorables est donc $\binom{8}{2}\times\binom{24}{3} = \frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{24\times23\times22}{3\times2\times1} = 56\,672$.

Donc, la probabilité de gagner est $\frac{56\,672}{201\,376} \approx 0{,}281$.

---

③ **1.** **a.** *Les trois épreuves sont indépendantes, l'énoncé le dit clairement.*



$\to P(\,(A_1\,;A_2\,;A_3)\,) = 0{,}55\times0{,}45\times0{,}2 = 0{,}0495$

$\to P(\,(A_1\,;A_2\,;\overline{A_3})\,) = 0{,}55\times0{,}45\times0{,}8 = 0{,}198$

$\to P(\,(A_1\,;\overline{A_2}\,;A_3)\,) = 0{,}55\times0{,}55\times0{,}2 = 0{,}0605$

$\to P(\,(A_1\,;\overline{A_2}\,;\overline{A_3})\,) = 0{,}55\times0{,}55\times0{,}8 = 0{,}242$

$\to P(\,(\overline{A_1}\,;A_2\,;A_3)\,) = 0{,}45\times0{,}45\times0{,}2 = 0{,}0405$

$\to P(\,(\overline{A_1}\,;A_2\,;\overline{A_3})\,) = 0{,}45\times0{,}45\times0{,}8 = 0{,}162$

$\to P(\,(\overline{A_1}\,;\overline{A_2}\,;A_3)\,) = 0{,}45\times0{,}55\times0{,}2 = 0{,}0495$

$\to P(\,(\overline{A_1}\,;\overline{A_2}\,;\overline{A_3})\,) = 0{,}45\times0{,}55\times0{,}8 = 0{,}198$

b. Les arrêts possibles sont modélisés par le produit cartésien $\{A_1\,;\overline{A_1}\}\times\{A_2\,;\overline{A_2}\}\times\{A_3\,;\overline{A_3}\}$.
Le nombre d'issues possibles est $2^3 = 8$.

2. Les triplets favorables à l'évènement « *s'arrêter deux fois* » sont $(A_1\,;A_2\,;\overline{A_3})$, $(A_1\,;\overline{A_2}\,;A_3)$ et $(\overline{A_1}\,;A_2\,;A_3)$.
Donc, la probabilité de s'arrêter deux fois est $0{,}198 + 0{,}0605 + 0{,}0405 = 0{,}299$.

3. Le triplet favorable à l'évènement « *s'arrêter à aucun feu* » est $(\overline{A_1}\,;\overline{A_2}\,;\overline{A_3})$.
Donc, la probabilité de ne s'arrêter à aucun feu est $0{,}198$.

4. **a.** D'après **3.**, $P(X=0) = 0{,}198$.
$P(X=1) = 0{,}242 + 0{,}162 + 0{,}0495 = 0{,}4535$.
D'après **3.**, $P(X=2) = 0{,}299$.
$P(X=3) = 0{,}0495$.

La loi de probabilité est donc :

Issues	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
Probabilités	0,198	0,4535	0,299	0,0495

b. L'espérance de X est $E(X) = 0\times0{,}198 + 1\times0{,}4535 + 2\times0{,}299 + 3\times0{,}0495 = 1{,}2$.
On peut en conclure qu'à chaque trajet, l'automobile s'arrête en moyenne 1,2 fois.

---

④ **a.** *L'énoncé demande clairement qu'on rédige le texte.*

Attention au choix du succès *: on donne le pourcentage de boites avec traces de pesticides, mais la variable aléatoire donnée compte les boîtes sans trace de pesticides, donc le succès sera de prélever une boîte sans trace de pesticides.*

Une boîte est sans traces de pesticides, avec une probabilité $p = 0{,}88$, ou est avec traces de pesticides.
Donc, prélever une boîte dans le stock est une épreuve de Bernoulli.
Le tirage aléatoire de 10 boîtes est assimilé à un tirage avec remise, *→ Cause de l'indépendance.*
donc l'épreuve de Bernoulli est répétée 10 fois de manière indépendante
donc c'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}88$
donc, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}88$.

b. On déduit du **a.** :

$$P(X=10) = \binom{10}{10}0{,}88^{10}\times(1-0{,}88)^{10-10}$$
$$= 0{,}88^{10}$$
$$\approx 0{,}28 \text{ , arrondi au centième}$$

Donc, la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides est d'environ 0,28.

c. $P(X\geqslant 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$ *→ Inutile de justifier de nouveau par la loi binomiale.*

$$= \binom{10}{8}0{,}88^{8}\times(1-0{,}88)^{2} + \binom{10}{9}0{,}88^{9}\times(1-0{,}88)^{1} + P(X=10)$$

$$\approx 0{,}89 \text{ , arrondi au centième.}$$

Donc, la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides est d'environ 0,89.

⑤ **a.** Cette première question ne concerne qu'un seul candidat.
On n'a donc pas encore répété l'expérience plusieurs fois, la loi binomiale n'est pas encore entrée en scène...

Parmi tous les dossiers, la proportion de dossiers validés est 40 %.
Parmi ces 40 %, 70 % sont retenus, donc la proportion de dossiers retenus est 70 % de 40 %.
Parmi ces 70 % de 40 %, 25 % sont recrutés, donc la proportion de dossiers recrutés est 25 % de 70 % de 40 %.
Donc, la probabilité que le candidat soit recruté est $0{,}25\times0{,}7\times0{,}4 = 0{,}07$.

b. Attention ! Ici, pas de question qui demande clairement de justifier la loi binomiale.
Mais il faut quand même la présenter.

Ce qui sert de succès est donné par ce que compte la variable X : elle compte <u>le nombre de recrutés</u>, donc le succès sera d'<u>être recruté</u>.

Chaque candidat sera recruté, avec une probabilité $p = 0{,}07$, ou ne sera pas recruté.
Donc, le recrutement d'un candidat est une épreuve de Bernoulli.

Les études des 5 dossiers sont faites indépendamment les unes des autres, → L'énoncé annonce clairement l'indépendance, je recopie cette partie.
donc l'épreuve de Bernoulli est répétée 5 fois de manière indépendante,
donc c'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}07$
donc, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}07$

$$\begin{aligned} \text{donc } P(X=2) &= \binom{5}{2} 0{,}07^2 \times (1-0{,}07)^{5-2} \\ &= \frac{5\times4}{2\times1} \times 0{,}07^2 \times 0{,}93^3 \\ &\approx 0{,}039 \text{ , arrondi à } 10^{-3} \end{aligned}$$

Donc, la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés est d'environ 0,039.

---

⑥ **a.** Ce qui servira de succès est donné par ce que compte la variable X : elle compte <u>les conifères</u>, donc le succès sera de <u>choisir un conifère</u>.

Un arbre dans le stock est un conifère, avec une probabilité $p = 1 - 0{,}475 = 0{,}525$, ou est un arbre à feuilles.
Donc, choisir un arbre dans le stock est une épreuve de Bernoulli.

Le choix de l'échantillon de 10 arbres est assimilé à un tirage avec remise,
donc l'épreuve de Bernoulli est répétée 10 fois de manière indépendante,
donc c'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}52$
donc, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}525$.

$$\begin{aligned} \text{donc } P(X=5) &= \binom{10}{5} 0{,}525^5 \times (1-0{,}525)^{10-5} \\ &= \frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1} \times 0{,}525^5 \times 0{,}\ 0{,}475^5 \\ &\approx 0{,}243 \text{ , arrondi à } 10^{-3} \end{aligned}$$

Donc, la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères est d'environ 0,243.

b. Les succès sont les conifères.
Mais cette question donne « au moins 2 feuillus », il faut le transformer en une information sur les conifères :
Comporter au moins deux arbres feuillus est équivalent à comporter au plus 8 conifères.

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 8) &= 1 - P(X > 8) \\ &= 1 - P(X=9) - P(X=10) \\ &= 1 - \binom{10}{9} 0{,}525^9 \times 0{,}475^1 - \binom{10}{10} 0{,}525^{10} \times 0{,}475^0 \\ &\approx 0{,}984 \text{ , arrondi à } 10^{-3} \end{aligned}$$

Donc, la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus est d'environ 0,984.

---

⑦ **a.** Après avoir rédigé que X suit une loi binomiale, vous devez trouver : $P(X=3) \approx 0{,}236$ arrondi au millième

b. Vous devez trouver : $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}991$ arrondi au millième

c. $$\begin{aligned} P(X \geqslant 6) &= 1 - P(X < 6) \\ &\approx 1 - 0{,}8725 = 0{,}1275 > 0{,}1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 7) &= 1 - P(X < 7) \\ &\approx 1 - 0{,}9616 = 0{,}0384 < 0{,}1 \end{aligned}$$

C'est donc à partir de $N = 7$ que la probabilité de cet évènement est inférieure à 0,1.

⑧ **a.** Le paramètre p est la probabilité de tirer une boule rouge.

Donc $p = \frac{4}{n+4}$.

b.
$$\begin{aligned} q_n &= P(X \leqslant 3) \\ &= 1 - P(X = 4) \\ &= 1 - \binom{4}{4}\left(\frac{4}{n+4}\right)^4 \times \left(1 - \frac{4}{n+4}\right)^{4-4} \\ &= 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} & q_n \geqslant 0{,}9999 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4 \geqslant 0{,}9999 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{4}{n+4}\right)^4 \leqslant 0{,}0001 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{\left(\frac{4}{n+4}\right)^4} \leqslant \sqrt{0{,}0001} \quad \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbb{R}+ \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{4}{n+4}\right)^2 \leqslant 0{,}01 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{\left(\frac{4}{n+4}\right)^2} \leqslant \sqrt{0{,}01} \quad \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbb{R}+ \\ \Leftrightarrow\ & \frac{4}{n+4} \leqslant 0{,}1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{n+4}{4} \geqslant \frac{1}{0{,}1} \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}+^* \\ \Leftrightarrow\ & n + 4 \geqslant 4 \times 10 \\ \Leftrightarrow\ & n \geqslant 36 \end{aligned}$$

Le plus petit entier naturel n pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à 0,999 9 est donc 36.

---

⑨ **a.** Un membre adhère à la section tennis, avec une probabilité $p = 0{,}30$, ou non.
Donc, choisir au hasard un membre est une épreuve de Bernoulli.
L'épreuve de Bernoulli est répétée 4 fois de manière indépendante.
donc c'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}3$
donc, la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois que le membre choisi soit adhérent à la section tennis suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}3$.

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{4}{2} 0{,}3^2 \times (1 - 0{,}3)^{4-2} \\ &= \frac{4\times 2}{2\times 1} \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^2 \\ &\approx 0{,}265 \text{ , arrondi à } 10^{-3}. \end{aligned}$$

b. X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}3$.

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} 0{,}3^0 (1 - 0{,}3)^{n-0} \\ &= 1 - 0{,}7^n \end{aligned}$$