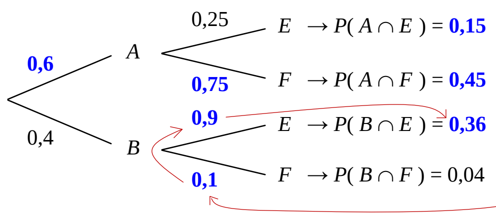
Correction de **PROBABILITÉS - Fiche 1**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯

① **1.**

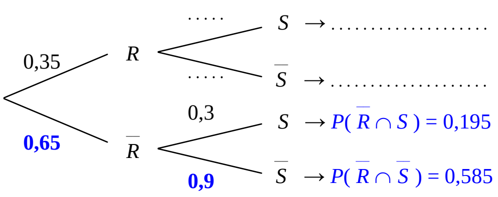


Je calcule d'abord $\dfrac{0{,}04}{0{,}4} = 0{,}1$ qui me permet d'obtenir 0,9 puis 0,36 .

- A et B forment une partition,
  donc, d'après la formule des probabilités totales :
  $$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= P(A) \times P_A(E) + P(B) \times P_B(E) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}25 + 0{,}4 \times 0{,}9 \\ &= 0{,}51 \end{aligned}$$

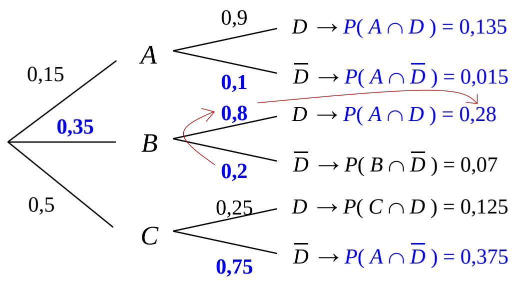
- D'après le principe multiplicatif :
  $$\begin{aligned} P_E(A) &= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{0{,}15}{0{,}51} \\ &\approx 0{,}29 \text{ , arrondi à } 10^{-2} \end{aligned}$$

2.



Impossible de remplir cette partie, nous n'avons aucune indication...

3.

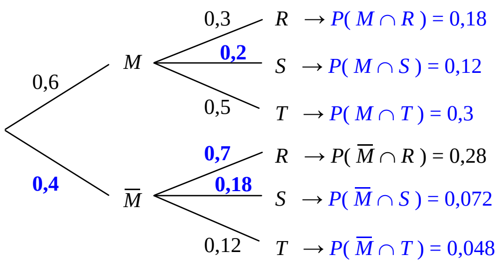


- A , B et C forment une partition,
  donc, d'après la formule des probabilités totales :
  $$\begin{aligned} P(\overline{D}) &= P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D}) + P(C \cap \overline{D}) \\ &= P(A) \times P_A(\overline{D}) + P(B) \times P_B(\overline{D}) + P(C) \times P_C(\overline{D}) \\ &= 0{,}15 \times 0{,}1 + 0{,}35 \times 0{,}2 + 0{,}5 \times 0{,}75 \\ &= 0{,}46 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} P(D) &= 1 - P(\overline{D}) \\ &= 1 - 0{,}46 = 0{,}54 \end{aligned}$$

- D'après le principe multiplicatif :
  $$\begin{aligned} P_D(A) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{0{,}135}{0{,}54} = 0{,}25 \end{aligned}$$

4.



- M et $\overline{M}$ forment une partition,
  donc, d'après la formule des probabilités totales :
  $$\begin{aligned} P(S) &= P(M \cap S) + P(\overline{M} \cap S) \\ &= P(M) \times P_M(S) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(S) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}18 = 0{,}192 \end{aligned}$$

- D'après le principe multiplicatif :

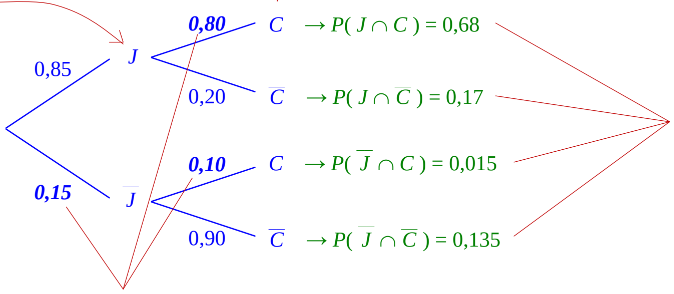
$$P_S(\overline{M}) = \frac{P(\overline{M}\cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}072}{0{,}192} = 0{,}375$$

---

② **a.** Je trouve l'axe chronologique.

On choisit d'abord entre "plate" et "japonaise" : la 1$^{\text{ère}}$ partition est J et $\overline{J}$.

Puis, parmi chaque espèce, on donne le pourcentage de calibre n°3 : la 2$^{\text{ème}}$ partition est C et $\overline{C}$.



4 probabilités d'intersections, obtenues en multipliant les probabilités des branches
(on n'est pas obligé de les écrire, mais elles permettent de s'y retrouver facilement dans la suite du problème)

3 probabilités données dans l'énoncé.
les autres s'en déduisent par soustraction à 1

b. Une huître plate (**et**) de calibre n°3 correspond à $\overline{J}\cap C$.

D'après le principe multiplicatif :

$$P(\overline{J}\cap C) = P(\overline{J})\times P_{\overline{J}}(C) = 0{,}15\times 0{,}10 = 0{,}015$$

Donc, la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n°3 est 0,015.

c. On cherche $P(C)$, la probabilité simple d'un évènement de la 2$^{\text{ème}}$ partition : il nous faut les probabilités totales...

J et $\overline{J}$ forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(J\cap C) + P(\overline{J}\cap C) \\ &= P(J)\times P_J(C) + 0{,}015 \\ &= 0{,}85\times 0{,}80 + 0{,}015 \\ &= 0{,}695 \end{aligned}$$

Donc, la probabilité d'obtenir une huître de calibre n°3 est bien 0,695.

d. La chronologie a changé : on sait d'abord que l'huître est de calibre n°3 , puis qu'elle est plate.

Cela correspond à $\overline{J}$ sachant C .

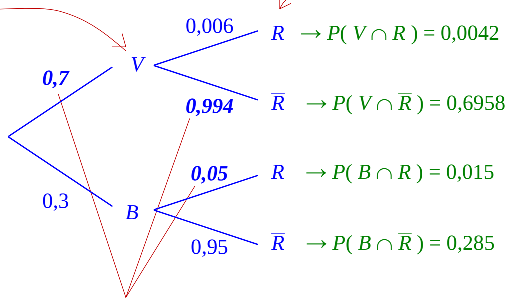
D'après le principe multiplicatif :

$$P_C(\overline{J}) = \frac{P(\overline{J}\cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}015}{0{,}695} \approx 0{,}0216 \text{ , arrondi à } 10^{-4}$$

---

③ **a.** On choisit d'abord entre "vélo" et "bus" : la 1$^{\text{ère}}$ partition est V et B .

Puis, pour chaque moyen de transport, on donne la probabilité d'arriver à l'heure ou en retard : la 2$^{\text{ème}}$ partition est R et $\overline{R}$.



Comme pour l'exercice précédent, les probabilités d'intersection ne sont pas obligatoires mais elles sont

3 probabilités données dans l'énoncé.
les autres s'en déduisent par soustraction à 1

b. D'après le principe multiplicatif :

$$P(V \cap R) = P(V) \times P_V(R)$$
$$= 0{,}7 \times 0{,}006 = 0{,}0042$$

c. On cherche $P(R)$, la probabilité simple d'un évènement de la 2^ème partition : il nous faut les probabilités totales...

V et B forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :

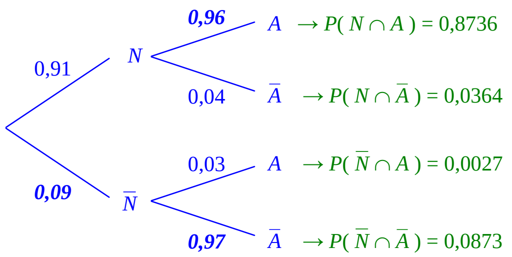
$$P(R) = P(V \cap R) + P(B \cap R)$$
$$= 0{,}0042 + P(B) \times P_B(R)$$
$$= 0{,}0042 + 0{,}3 \times 0{,}05$$
$$= 0{,}0192$$

d. La chronologie a changé : on sait d'abord que l'élève est en retard, puis qu'il a pris le bus.
Cela correspond à B sachant R.
D'après le principe multiplicatif :

$$P_R(B) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)}$$
$$= \frac{0{,}015}{0{,}0192}$$
$$= 0{,}78125$$

---

④ **a.** On sait d'abord si la peluche répond aux normes ou pas.
Puis, on sait si elle est acceptée à l'issue des tests.



Probabilités d'intersection pas obligatoires mais conseillées.

b. On cherche $P(A)$, la probabilité simple d'un évènement de la 2^ème partition : il nous faut les probabilités totales...

N et $\overline{N}$ forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(N \cap A) + P(\overline{N} \cap A)$$
$$= P(N) \times P_N(A) + P(\overline{N}) \times P_{\overline{N}}(A)$$
$$= 0{,}91 \times 0{,}96 + 0{,}09 \times 0{,}03$$
$$= 0{,}8763$$

c. La chronologie a changé : on sait d'abord que la peluche a été acceptée, puis qu'elle est bien aux normes.
Cela correspond à N sachant A.
D'après le principe multiplicatif :

$$P_A(N) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)}$$
$$= \frac{0{,}8736}{0{,}8763}$$
$$\approx 0{,}9969$$

---

⑤ **1.** On place d'abord les trois probabilités données dans l'énoncé :

0,2 et 0,1 sont clairement des probabilités simples.

0,75 est la probabilité de n'avoir aucun défaut, c'est-à-dire d'être ni dans A ni dans B, c'est-à-dire d'être dans $\overline{A}$ **et** dans $\overline{B}$: c'est la probabilité de l'intersection $\overline{A} \cap \overline{B}$.

	A	$\overline{A}$	Total
B			0,2
$\overline{B}$		0,75	
Total	0,1		1

Puis, par soustraction, on complète les autres cases :

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,05	0,15	0,2
$\overline{B}$	0,05	0,75	0,8
Total	0,1	0,9	1

2. **a.** *Il s'agit de la probabilité de l'évènement* A ou B :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}05 \\ &= 0{,}25 \end{aligned}$$

On pouvait aussi faire :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= 1 - 0{,}75 \\ &= 0{,}25 \end{aligned}$$

b. *Il s'agit de la probabilité de l'évènement* $A \cap B$ *qu'on a déjà remplie dans le tableau.*
Le verbe donner *est un peu vague, il vaut mieux présenter le calcul…*

1ère *méthode, en utilisant* $P(\overline{B})$ *puis* $P(A \cap \overline{B})$:

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

donc $P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}8 - 0{,}75 = 0{,}05$

donc $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = 0{,}1 - 0{,}05 = 0{,}05$

2ème *méthode, en utilisant* $P(\overline{A})$ *puis* $P(\overline{A} \cap B)$:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

donc $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}9 - 0{,}75 = 0{,}15$

donc $P(A \cap B) = P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}05$

c. 1ère *méthode, en comparant* $P(A \cap B)$ *et* $P(A) \times P(B)$*, clairement la méthode la plus simple :*

$$\begin{cases} P(A \cap B) = 0{,}05 \\ P(A) \times P(B) = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02 \end{cases}$$

donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$
donc A et B ne sont pas indépendants.

2ème *méthode, en comparant* $P(A)$ *et* $P_B(A)$:

$$\begin{cases} P(A) = 0{,}1 \\ P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}25 \end{cases}$$

donc $P(A) \neq P_B(A)$
donc A et B ne sont pas indépendants.

3ème *méthode, en comparant* $P(B)$ *et* $P_A(B)$:

$$\begin{cases} P(B) = 0{,}2 \\ P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}1} = 0{,}5 \end{cases}$$

donc $P(B) \neq P_A(B)$
donc A et B ne sont pas indépendants.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

donc $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}9 - 0{,}75 = 0{,}15$

donc $P(A \cap B) = P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}05$

3. *Attention, il ne s'agit pas de l'évènement* $A \cup B$ *qui contient la possibilité d'avoir les deux défauts.*
Ce sont les deux évènements $A \cap \overline{B}$ *(avoir le défaut* T1 **et** *pas le défaut* T2*)* et $B \cap \overline{A}$ *(avoir le défaut* T2 **et** *pas le défaut* T1*).*
Ils sont disjoints donc on trouve la probabilité en faisant la somme des deux probabilités :

$P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2$

4. *Cela correspond à* B *sachant* A*, qu'on a pu calculer dans la question* **2. c.** .
D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{0{,}05}{0{,}1} \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

---

⑥ **1.** *On place d'abord les trois probabilités données dans l'énoncé :*

7 % = 0,07 *qui est la probabilité simple de* M .

1,4 % = 0,014 *qui est la probabilité d'intersection de* M *et* $\overline{T}$.

0,93 % = 0,0093 *qui est la probabilité d'intersection de* $\overline{M}$ *et* T .

	M	$\overline{M}$	Total
T		0,0093	
$\overline{T}$	0,014		
Total	0,07		1

Puis, par soustraction et addition, on complète les autres cases :

	M	$\overline{M}$	Total
T	0,056	0,0093	0,0653
$\overline{T}$	0,014	0,9207	0,9347
Total	0,07	0,93	1

2. Il s'agit de la probabilité de l'évènement T qu'on a déjà remplie dans le tableau.
Le verbe démontrer indique qu'il faut présenter le calcul.

$$P(M \cap T) = P(M) - P(M \cap \overline{T}) = 0{,}07 - 0{,}014 = 0{,}056$$

donc $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0{,}056 + 0{,}0093 = 0{,}0653$

3. D'après le principe multiplicatif :

$$P_M(T) = \frac{P(M \cap T)}{P(M)} = \frac{0{,}056}{0{,}07} = 0{,}8$$

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}056}{0{,}0653} \approx 0{,}86 \text{ arrondi à } 10^{-2}$$

4. $P_M(T)$ représente la probabilité que la personne choisie soit positive sachant qu'elle est malade.
Or, il n'y a aucun intérêt à savoir si elle est positive si on sait déjà qu'elle est malade.

$P_T(M)$ représente la probabilité que la personne choisie soit malade sachant qu'elle est positive.
C'est la probabilité qui nous intéresse pour compléter le dépistage.

5. Comparer la probabilité simple et la probabilité conditionnelle est le plus simple puisqu'on vient de calculer les probabilités conditionnelles.

1ère méthode, en comparant $P(M)$ et $P_T(M)$:

$$\begin{cases} P(M) = 0{,}07 \\ P_T(M) \approx 0{,}86 \end{cases}$$

donc $P(M) \neq P_T(M)$
donc M et T ne sont pas indépendants. Ce qui est tout de même rassurant...

2ème méthode, en comparant $P(T)$ et $P_M(T)$:

$$\begin{cases} P(T) = 0{,}0653 \\ P_M(T) = 0{,}8 \end{cases}$$

donc $P(T) \neq P_M(T)$
donc M et T ne sont pas indépendants.

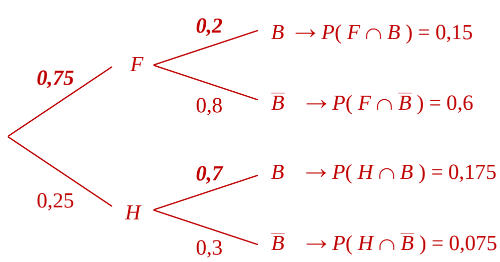
2ème méthode, en comparant $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$:

$$\begin{cases} P(M \cap T) = 0{,}056 \\ P(M) \times P(T) = 0{,}07 \times 0{,}0653 = 0{,}004571 \end{cases}$$

donc $P(M \cap T) \neq P(M) \times P(T)$
donc M et T ne sont pas indépendants.

---

⑦ Avec un arbre pondéré :



$$P(B) = P(F \cap B) + P(H \cap B) = 0{,}15 + 0{,}175 = 0{,}325$$

$$P_B(F) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}15}{0{,}325} \approx 0{,}462$$

Réponse C.

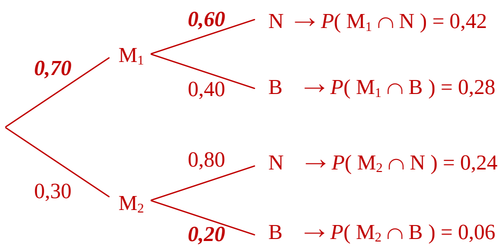
Avec un tableau croisé :

	F	H	Total
B	$\mathbf{0{,}2} \times 0{,}75 =$ 0,15	$\mathbf{0{,}7} \times 0{,}25 =$ 0,175	$0{,}15 + 0{,}175 =$ 0,325
$\overline{B}$	$\mathbf{0{,}75} - 0{,}15 =$ 0,6	$0{,}25 - 0{,}175 =$ 0,075	$0{,}6 + 0{,}075 =$ 0,675
Total	**0,75**	$1 - \mathbf{0{,}75} =$ 0,25	1

$$P_B(F) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}15}{0{,}325} \approx 0{,}462$$

Réponse C.

⑧ *Avec un arbre pondéré :*



a. $P(\mathrm{M}_2 \cap \mathrm{N}) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}24 = \dfrac{6}{25}$

Réponse D.

b. $P(\mathrm{N}) = P(\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{N}) + P(\mathrm{M}_2 \cap \mathrm{N}) = 0{,}42 + 0{,}24 = 0{,}66 = \dfrac{33}{50}$

Réponse B.

c. $P_{\mathrm{N}}(\mathrm{M}_2) = \dfrac{P(\mathrm{M}_2 \cap \mathrm{N})}{P(\mathrm{N})} = \dfrac{0{,}24}{0{,}66} = \dfrac{24}{66} = \dfrac{4}{11}$

Réponse A.

Avec un tableau croisé :

	M_1	M_2	Total
N	$\mathbf{0{,}6} \times \mathbf{0{,}7} =$ 0,42	$0{,}3 - 0{,}06 =$ 0,24	$0{,}42 + 0{,}24 =$ 0,66
B	$\mathbf{0{,}7} - 0{,}42 =$ 0,28	$\mathbf{0{,}2} \times 0{,}3 =$ 0,06	$0{,}28 + 0{,}06 =$ 0,34
Total	**0,7**	$1 - \mathbf{0{,}7} =$ 0,3	1

a. $P(\mathrm{M}_2 \cap N) = 0{,}24 = \dfrac{6}{25}$

Réponse D.

b. $P(N) = 0{,}66 = \dfrac{33}{50}$

Réponse B.

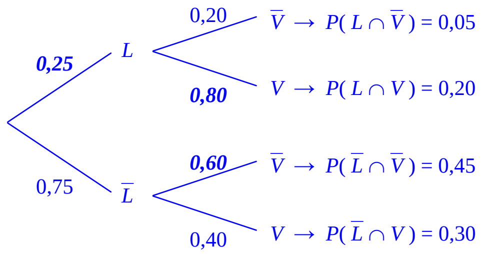
c. $P_{\mathrm{N}}(\mathrm{M}_2) = \dfrac{P(\mathrm{M}_2 \cap \mathrm{N})}{P(\mathrm{N})} = \dfrac{0{,}24}{0{,}66} = \dfrac{24}{66} = \dfrac{4}{11}$

Réponse A.

⑨ *Attention, contrairement aux QCM, vous êtes obligés de justifier, et donc de rédiger !*

Je pose L l'évènement « *il pleut* » et V l'évènement « *Zoé prend sa voiture* ».

→ L'énoncé ne vous donne pas le nom des évènements et, bien sûr, vous ne pouvez pas utiliser la lettre P pour « il pleut » !



L et $\overline{L}$ forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(V) &= P(L \cap V) + P(\overline{L} \cap V) \\ &= P(L) \times P_L(V) + P(\overline{L}) \times P_{\overline{L}}(V) \\ &= 0,25 \times 0,80 + 0,75 \times 0,40 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

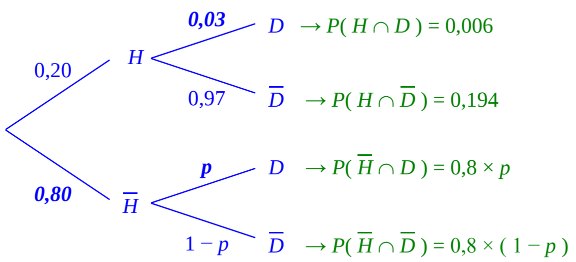
Donc, l'affirmation n°1 est vraie.

Avec un tableau croisé :

	L	$\overline{L}$	Total
V	**0,8** × **0,25** = 0,2	0,75 – 0,45 = 0,3	0,2 + 0,3 = 0,5
$\overline{V}$		**0,6** × 0,75 = 0,45	
Total	**0,25**	1 – **0,25** = 0,75	1

Il faut néanmoins justifier les calculs comme avec l'arbre.

⑩ **a.** *On sait d'abord si le cadenas est haut de gamme ou non, puis, s'il est défectueux ou non.*



b. *On cherche $P(D)$, la probabilité simple d'un évènement de la 2ème partition : il nous faut les probabilités totales...*

H et $\overline{H}$ forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(H \cap D) + P(\overline{H} \cap D) \\ &= P(H) \times P_H(D) + P(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(D) \\ &= 0,2 \times 0,03 + 0,8\,p \\ &= 0,006 + 0,8\,p \end{aligned}$$

On sait que $P(D) = 0,07$

donc $0,006 + 0,8\,p = 0,07$

$\Leftrightarrow p = 0,080$

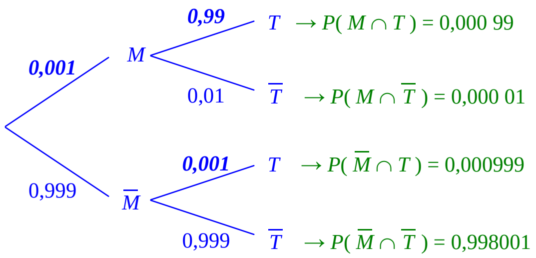
c) *La chronologie a changé : on sait d'abord que le cadenas n'est pas défectueux, puis qu'il est haut de gamme.*

Cela correspond à $\overline{D}$ sachant H.

D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned} P_H(\overline{D}) &= \frac{P(N \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{0,2 \times 0,97}{1 - 0,07} \\ &\approx 0,209 \end{aligned}$$

⑪ **1.** **a.** On sait d'abord si la personne est malade ou non, puis si elle présente un test positif.



b. On cherche $P(T)$, la probabilité simple d'un évènement de la 2ème partition : il nous faut les probabilités totales...

M et $\overline{M}$ forment une partition,

donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) \\ &= P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}001 \\ &= 1{,}989 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

C'est bien la valeur attendue.

c. La chronologie a changé : on sait d'abord que le test est positif, puis que la personne est malade.
Cela correspond à M sachant T.

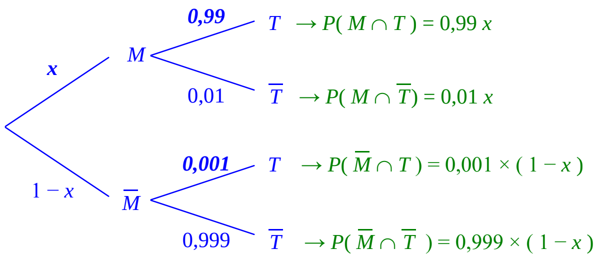
D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0{,}001 \times 0{,}99}{1{,}989 \times 10^{-3}} \\ &= 0{,}497... < 0{,}5 \end{aligned}$$

→ Évitez les arrondis pour comparer, il vaut mieux une valeur exacte avec ses pointillés.

Donc, l'affirmation est vraie.

2. Question pas facile...
Il faut d'abord comprendre que x représente $P(M)$ et prend donc la place de $0{,}001$.
Ensuite, il faut comprendre que la probabilité qui doit être supérieure ou égale à $0{,}95$ est $P_T(M)$.
Il faut donc refaire toute la démarche des questions **a.**, **b.** et **c.** !
Courage...



Vous avez bien rédigé dans les questions précédentes, vous avez le droit d'aller plus vite :

Comme dans la question *a)* 2) :

$$\begin{aligned} P(T) &= x \times 0{,}99 + (1 - x) \times 0{,}001 \\ &= 0{,}001 + 0{,}989\,x \end{aligned}$$

Comme dans la question *a)* 3) :

$$P_T(M) = \frac{0{,}99\,x}{0{,}001 + 0{,}989\,x}$$

On en déduit :

$$\frac{0{,}99\,x}{0{,}001 + 0{,}989\,x} \geqslant 0{,}95$$

$\Leftrightarrow 0{,}99\,x \geqslant 0{,}95\,(0{,}001 + 0{,}989\,x)$

$\Leftrightarrow 0{,}99\,x \geqslant 0{,}00095 + 0{,}93955\,x$

$\Leftrightarrow 0{,}99\,x - 0{,}93955\,x \geqslant 0{,}00095$

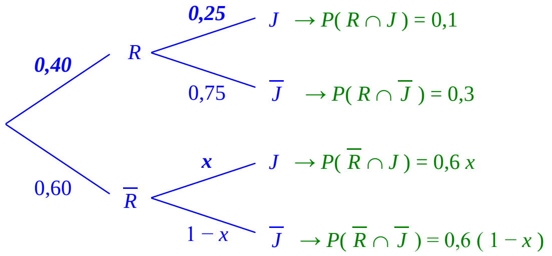
$\Leftrightarrow 0{,}05045\,x \geqslant 0{,}00095$

$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{0{,}00095}{0{,}05045}$

$\Leftrightarrow x \geqslant 0{,}01883...$

Donc, le laboratoire commercialise le test correspondant lorsque la proportion de personnes atteintes de la maladie dépasse 1,88 %.

⑫ **a.** On sait d'abord si la bouteille est du jus d'orange ou non, puis, si elle pur jus ou non.



b. Parmi toutes les données de l'énoncé, nous n'avons pas encore utilisé 20 %, qui est $P(J)$, la probabilité simple d'un évènement de la 2$^{\text{ème}}$ partition.
On va donc utiliser les probabilités totales...

R et $\overline{R}$ forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(J) &= P(R \cap J) + P(\overline{R} \cap J) \\ &= P(R) \times P_R(J) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(J) \\ &= 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}6\,x \\ &= 0{,}1 + 0{,}6\,x \end{aligned}$$

Or, on sait que $P(J) = 0{,}2$

donc $0{,}1 + 0{,}6\,x = 0{,}2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{0{,}1}{0{,}6} = \dfrac{1}{6}$ → Pas d'arrondi !

Attention à ne pas rater cette question, au risque de ne pas pouvoir faire la suivante...

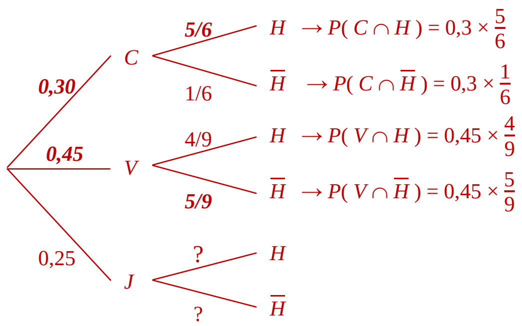
c. La chronologie a changé : on sait d'abord que la bouteille est de pur jus, puis que c'est une bouteille de jus d'orange.
Cela correspond à R sachant J.

D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned} P_J(R) &= \frac{P(R \cap J)}{P(J)} \\ &= \frac{0{,}4 \times 0{,}25}{0{,}2} \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

---

⑬ **1.** L'arbre est conseillé mais pas exigé.
Vous pouvez donc le faire, au brouillon ou au propre.



Attention, quand on dit qu'il s'agit d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité, on parle de l'évènement $C \cap H$, pas de H sachant C.

$$\begin{aligned} P(C \cap H) &= P(C) \times P_C(H) \\ &= 0{,}30 \times \frac{5}{6} \\ &= 0{,}25 \end{aligned}$$

Donc, la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité est de 0,25.

2. Vous ne pourrez pas calculer $P(J \cap H)$ comme $P(C \cap H)$, en utilisant $P(J) \times P_J(H)$ car vous n'avez pas $P_J(H)$ ...
Il faut chercher une autre manière !
Or, on ne vous a pas donné $P(H)$ pour rien...

C, J et V forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(H) &= P(C \cap H) + P(V \cap H) + P(J \cap H) \\ &= 0{,}25 + P(V) \times P_V(H) + P(J \cap H) \\ &= 0{,}25 + 0{,}45 \times \left(1 - \frac{5}{9}\right) + P(J \cap H) \\ &= 0{,}25 + 0{,}2 + P(J \cap H) \\ &= 0{,}45 + P(J \cap H) \end{aligned}$$

Or, on sait que $P(H) = \dfrac{13}{20}$,

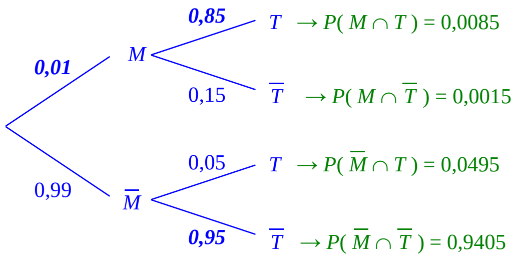
donc $P(J \cap H) = \dfrac{13}{20} - 0{,}45 = 0{,}2$

D'après le principe multiplicatif :

$$P_J(H) = \frac{P(J \cap H)}{P(J)} = \frac{0{,}2}{0{,}25} = 0{,}8$$

---

⑭ **1.** On sait d'abord si l'animal est malade ou non, puis si le test est positif ou non.



2. **a.** On voit bien le " **et** " , on veut calculer $P(M \cap T)$.

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}01 \times 0{,}85 = 0{,}0085$$

b. On veut $P(T)$, la probabilité simple d'un évènement de la 2ème partition.

M et $\overline{M}$ forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0{,}0085 + 0{,}99 \times 0{,}05 = 0{,}058$$

3. La chronologie a changé : on sait d'abord que le test est positif, puis que l'animal est malade.
Cela correspond à M sachant T .

D'après le principe multiplicatif :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0085}{0{,}058} \approx 0{,}1466 \text{ , arrondi à } 10^4$$

→ Pas de précision demandée dans l'énoncé... On peut donner 4 chiffres significatifs.

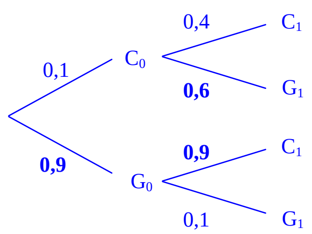
---

⑮ **Partie A**

1. **a.** Au début de la journée, 90 % des vélos sont à la gare : $g_0 = 0{,}9$
$c_0 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

b. Dans l'énoncé aussi : $P_{G_0}(C_1) = 0{,}9$

c.



d. « Le vélo a été emprunté **et** déposé à la gare plate » correspond à $G_0 \cap G_1$.

D'après le principe multiplicatif :

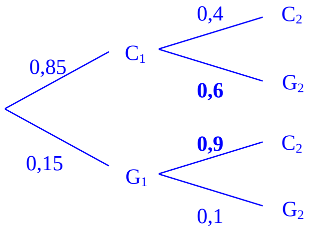
$$P(G_0 \cap G_1) = P(G_0) \times P_{G_0}(G_1) = 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}09$$

e. C_0 et G_0 forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(C_1) = P(C_0 \cap C_1) + P(G_0 \cap C_1) = P(C_0) \times P_{C_0}(C_1) + P(G_0) \times P_{G_0}(C_1) = 0{,}1 \times 0{,}4 + 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}85$$

f. C_1 et G_1 forment une partition
donc $P(C_1) = 1 - P(C_1)$
donc $g_1 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

2. a.

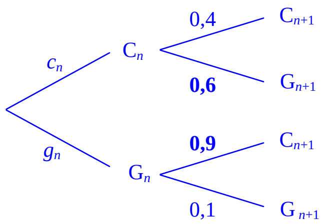


b. C_1 et G_1 forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :
$P(C_2) = P(C_1 \cap C_2) + P(G_1 \cap C_2)$
$= 0{,}85 \times 0{,}4 + 0{,}15 \times 0{,}9$
donc $c_2 = 0{,}475$

et donc $g_2 = 1 - 0{,}475 = 0{,}525$.

Partie B

1. a.



b. C_n et G_n forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :
$P(C_{n+1}) = P(C_n \cap C_{n+1}) + P(G_n \cap C_{n+1})$
$= c_n \times 0{,}4 + g_n \times 0{,}9$
donc $c_{n+1} = 0{,}4\, c_n + 0{,}9\, g_n$.

c. On a $g_n = 1 - c_n$
donc $c_{n+1} = 0{,}4\, c_n + 0{,}9\,(1 - c_n)$
$= 0{,}9 - 0{,}5\, c_n$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= c_{n+1} - 0{,}6 \\ &= 0{,}9 - 0{,}5\, c_n - 0{,}6 \\ &= -0{,}5\, c_n + 0{,}3 \\ &= -0{,}5\left(c_n + \frac{0{,}3}{-0{,}5} \right) \\ &= -0{,}5\,(c_n - 0{,}6) \\ &= -0{,}5\, v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $-0{,}5$ et de premier terme $v_0 = c_0 - 0{,}6 = 0{,}1 - 0{,}6 = -0{,}5$.

b.
- (v_n) géométrique de raison $-0{,}5$ et de premier terme $v_0 = -0{,}5$
  donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -0{,}5 \times (-0{,}5)^n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $v_n = c_n - 0{,}6$
  $\Leftrightarrow c_n = v_n + 0{,}6$

  Donc $c_n = -0{,}5 \times (-0{,}5)^n + 0{,}6$

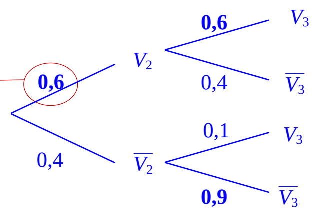
c. $c_8 = -0{,}5 \times (-0{,}5)^8 + 0{,}6$
$\approx 0{,}598$

d. $-1 < -0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0{,}5)^n = 0$

donc, par produit puis somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0{,}6$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = 1 - c_n$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = 1 - \lim\limits_{n \to +\infty} c_n$
$= 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

⑯ **1.** L'arbre n'est pas demandé, mais on a le droit de le faire, c'est même conseillé...



Les probabilités conditionnelles des branches secondaires sont faciles à placer, ce sont celles données dans l'énoncé.
Paradoxalement, ce sont les probabilités simples des branches primaires qui sont les plus délicates...
Pour trouver $P(V_2)$:

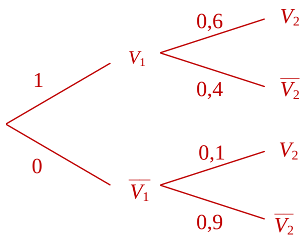
- La seule chose qu'on sait, c'est que la probabilité de V_2 sachant V_1 est $0,6$.
- Mais c'est une probabilité conditionnelle alors qu'on veut une probabilité simple.
- Or, on suppose que le premier sondage est positif, ce qui veut dire que V_1 s'est réalisé, c'est devenu l'évènement certain.
- Donc, $P_{V_1}(V_2) = 0,6$ équivaut à $P(V_2) = 0,6$.

Pour ceux qui en voudrait une preuve calculatoire :

comme V_1 est certain, il est l'univers Ω ,

donc $P_{V_1}(V_2) = \dfrac{P(V_1 \cap V_2)}{P(V_1)}$ avec $\begin{cases} P(V_2) = P(\Omega) = 1 \\ P(V_1 \cap V_2) = P(\Omega \cap V_2) = P(V_2) \end{cases}$ et donc $P_{V_1}(V_2) = P(V_2)$.

Pour ceux qui trouvent ça indigeste, une autre preuve par l'arbre qui précède celui qu'on vient de faire :



D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(V_2) &= P(V_1 \cap V_2) + P(\overline{V_1} \cap V_2) \\ &= 1 \times 0,6 + 0 \times 0,1 \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned} P(V_2 \cap V_3) &= P(V_2) \times P_{V_2}(V_3) \\ &= 0,6 \times 0,6 = 0,36 \end{aligned}$$

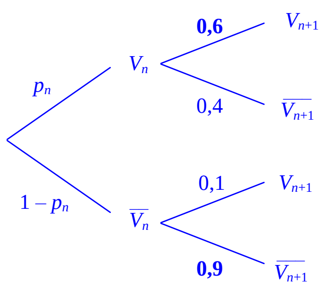
$$\begin{aligned} P(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) &= P(\overline{V_2}) \times P_{\overline{V_2}}(\overline{V_3}) \\ &= 0,4 \times 0,9 = 0,36 \end{aligned}$$

2. V_2 et $\overline{V_2}$ forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(V_3) &= P(V_2 \cap V_3) + P(\overline{V_2} \cap V_3) \\ &= 0,36 + 0,4 \times 0,1 \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

Donc $p_3 = 0,4$.

3.



4. V_n et $\overline{V_n}$ forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(V_{n+1}) &= P(V_n \cap V_{n+1}) + P(\overline{V_n} \cap V_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,6 + (1 - p_n) \times 0,1 \end{aligned}$$

donc $p_{n+1} = 0,5\,p_n + 0,1$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: → Avez-vous remarqué le « Pour tout entier naturel n non nul, » ?

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,2 \\ &= 0,5\,p_n + 0,1 - 0,2 \\ &= 0,5\,p_n - 0,1 \\ &= 0,5\left(p_n - \frac{0,1}{0,5}\right) \\ &= 0,5\,(p_n - 0,2) \\ &= 0,5\,u_n \end{aligned}$$

Donc (u_n) est géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 1 - 0,2 = 0,8$. → Le premier terme est u_1 et non u_0 .

6. ◆ (u) géométrique de raison $0{,}5$ et de premier terme $u_1 = 0{,}8$
donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0{,}8 \times 0{,}5^{n-1}$. → *Attention au piège ! C'est la formule* $\boxed{u_n = u_1\, q^{n-1}}$ *car le premier terme est* u_1 .

◆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = p_n - 0{,}2$

$\Leftrightarrow\ p_n = u_n + 0{,}2$

Donc $p_n = 0{,}8 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}2$.

7. $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^{n-1} = 0$
donc, par produit puis somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}2$.