Les droites dans l'espace

Principe « Les droites sont à l'espace ce que les points sont au plan »

Une droite de l'espace peut être vue comme le lieu d'intersection de deux plans sécants.

Exemple : (S) $\begin{cases} x+y+z=0 & \text{(P)} \\ 2x+3y+z-4=0 & \text{(Q)} \end{cases}$

est la description abstraite d'une droite (D).

Remarque : On sait, à partir du système (S) — 2 équations à 3 inconnue — déduire une équation paramétrique de (D). On fixe l'une des inconnues (x, y ou z) et on exprime les 2 autres en fonction de celle-ci.

Une droite de l'espace peut aussi être représentée par une équation paramétrique.

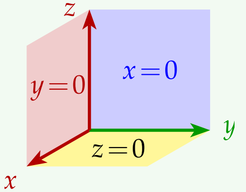
Exemple : (D) $\begin{cases} x = -4-2t \\ y = 4+1t \\ z = 0+1t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

où A(-4 ; 4 ; 0) est un point de (D) et $\vec{u}(-2\,;1\,;1)$ un vecteur directeur de (D)

⚠ Il n'y a pas unicité de cette représentation paramétrique.

Quelques droites particulières : celles définissant le repère usuel !

- (Ox) $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$
- (Oy) $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$
- (Oz) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$



Un point Ω appartient à une droite (D) si, et seulement si, il existe une valeur du paramètre t (soit t_0) telle que :

$$\begin{cases} x_\Omega = x_A + \alpha\, t_0 \\ y_\Omega = y_A + \beta\, t_0 \\ z_\Omega = z_A + \gamma\, t_0 \end{cases}$$

où $D(A, \vec{u})$ avec $\vec{u}(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$

Détermination d'une équation paramétrique d'une droite (D) de l'espace.

- **1er cas** : On dispose de 2 points A et B de (D).

  On a donc un point de (D) (A ou B) et un vecteur directeur : le vecteur $\overrightarrow{AB}$
- **2e cas** : On dispose d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$, suivant les cas :
  1) $\vec{u}$ est donné directement
  2) (D) // (D′) alors (D) est dirigée par $\vec{u}\,'$.
  3) (D) ⊥ (P) alors (D) est dirigée par $\vec{n}$ un vecteur normal au plan (P).

Position relative de deux droites (D) et (D′) de l'espace

1) Les droites (D) et (D′) ne sont pas coplanaires.
2) Les droites (D) et (D′) sont coplanaires :
   - **1er cas** : Les droites $D(A, \vec{u})$ et $D'(B, \vec{u}\,')$ sont sécante en un point I.

     Pour déterminer les coordonnées de I, on détermine le couple $(t, t') \in \mathbb{R}^2$ tel que :

     $$\begin{cases} x_A - \alpha t = x_B + \alpha' t' \\ y_A - \beta t = y_B + \beta' t' \\ z_A - \gamma t = z_B + \gamma' t' \end{cases} \quad \text{où} \quad \vec{u}(\alpha\,;\beta\,;\gamma)\ ,\ \vec{u}\,'(\alpha'\,;\beta'\,;\gamma')$$

     ⚠ Cas particuliers : $D(A, \vec{u}) \perp D'(B, \vec{u}\,') \iff \vec{u} \cdot \vec{u}\,' = 0$

2) - **2e cas** : Les droites $D(A, \vec{u})$ et $D'(B, \vec{u}\,')$ sont parallèles.

     $D \,//\, (D') \iff \vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ colinéaires

     $\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \vec{u}\,' = k\vec{u}$

     ⚠ Cas particulier : Les droites (D) et (D′) sont confondues, i.e. elles sont parallèles et ont un (donc tous) point commun.

Droites et plan :

- Une droite (D) peut être contenue dans le plan (P) ainsi $(P) \cap (D) = (D)$!
- Une droite (D) peut être sécante en I au le plan (P) ainsi $(P) \cap (D) = \{I\}$.
- Une droite (D) peut être parallèle strictement au le plan (P) ainsi $(P) \cap (D) = \varnothing$.