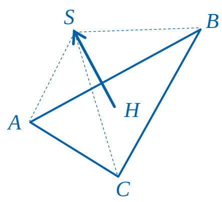
Savoir DÉTERMINER ET UTILISER LE PROJETÉ ORTHOGONAL D'UN POINT

Ce que je dois savoir faire sur les projetés orthogonaux sur des plans

- **Démontrer qu'un point H est le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$**
  - Si vous avez les coordonnées de M et de H et une équation cartésienne de $\mathscr{P}$, alors il faut vérifier :
    - que H est sur le plan $\mathscr{P}$ (avec l'équation cartésienne),
    - que la droite (MH) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ (par colinéarité des vecteurs directeur et normal).

- **Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$**
  - Si vous avez les coordonnées de M et une équation cartésienne de $\mathscr{P}$, alors il faut :
    - déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par M (avec le vecteur normal de $\mathscr{P}$ comme vecteur directeur de (Δ)),
    - calculer les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et de $\mathscr{P}$.

- Utiliser un projeté orthogonal pour **calculer la distance d'un point M à un plan $\mathscr{P}$**
  - Si H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$, alors la distance de M à $\mathscr{P}$ vaut MH.



- Utiliser un projeté orthogonal pour **calculer le volume d'une pyramide $SABC$**
  - Si H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC), alors $[SH]$ est la hauteur de la pyramide $SABC$, associée à la base ABC.

    Remarque : À adapter à tout type de base (carrée ou autre) incluse dans le plan orthogonal à (SH).
  - On peut alors utiliser la formule $\text{volume de } SABC = \dfrac{SH \times \text{aire de } ABC}{3}$.
  - On retrouve parfois la situation où il faut calculer l'aire de ABC :
    - on vous fait calculer $\text{volume de } SABC$ d'une autre manière,
    - on vous fait calculer SH,
    - on en déduit $\text{aire de } ABC$ par équation.

Ce que je dois savoir faire sur les projetés orthogonaux sur des droites

- **Démontrer qu'un point H est le projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d)**
  - Si vous avez les coordonnées de M et de H et une représentation paramétrique de (d), alors il faut vérifier :
    - que H est sur la droite (d) (avec la représentation paramétrique),
    - que la droite (MH) est orthogonale la droite (d) (par orthogonalité des vecteurs directeurs).

    Remarque : (MH) et (d) sont alors perpendiculaires puisque sécantes et orthogonales.

    Remarque : Si la droite (d) est caractérisée par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$, pas besoin d'une représentation paramétrique pour démontrer que H est sur la droite (d), il suffit de montrer que $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

- **Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d)**
  - Si vous avez les coordonnées de M et une représentation paramétrique de (d), alors il faut :
    - déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ orthogonal à (d) passant par M (avec le vecteur directeur de (d) comme vecteur normal de $\mathscr{P}$),
    - calculer les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et de $\mathscr{P}$.

- Utiliser un projeté orthogonal pour **calculer la distance d'un point M à une droite (d)**
  - Si H est le projeté orthogonal de M sur (d), alors la distance de M à (d) vaut MH.

Remarques sur les exercices

- Les exercices ① et ② montrent les deux manières d'obtenir un projeté orthogonal : en justifiant un point proposé ou en le déterminant.
- Les exercices ③ à ⑩ sont des problèmes de type bac.

---

① Les exercices **1.** et **2.** sont indépendants et se placent dans l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

1. Soit le plan $\mathscr{R} : 4x + 2y + 5z + 5 = 0$ et le point $A (11 ; 8 ; 14)$.

a. Montrer que A n'est pas sur le plan $\mathscr{R}$.

b. Justifier que le point $B (-1 ; 2 ; -1)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{R}$.

c. En déduire la distance du point A au plan $\mathscr{R}$.

2. Soit le plan $\mathscr{P} : 3x + 5y + 3z - 2 = 0$ et le point $E (6 ; 3 ; 4)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale à $\mathscr{P}$ et passant par E.

b. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal de E sur le plan $\mathscr{P}$.

c. En déduire la distance du point E au plan $\mathscr{P}$.

---

② Les exercices **1.** et **2.** sont indépendants et se placent dans l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

1. Soit la droite $(d) : \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -3t - 5 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, et le point $R (10 ; 4 ; -6)$.

a. Montrer que R n'est pas sur la droite (d).

b. Justifier que le point $S (-5 ; 1 ; -3)$ est le projeté orthogonal de R sur la droite (d).

c. En déduire la distance du point R à la droite (d).

2. Soit la droite $\mathscr{D} : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -9 + 3t \\ z = -4 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, et le point $A (0 ; -2 ; 3)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ orthogonal à $\mathscr{D}$ passant par A.

b. Calculer les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

c. En déduire la distance du point A à la droite $\mathscr{D}$.

---

③ Dans l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites (d_1) et (d_2) définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$(d_1) : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ et } (d_2) : \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 1 + s \\ z = 8 + 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

1. Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

2. Montrer que la droite (d_2) est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

3. Montrer que le point $L (4 ; 0 ; 3)$ est le projeté orthogonal du point $M (5 ; 3 ; 1)$ sur le plan $\mathscr{P}$.

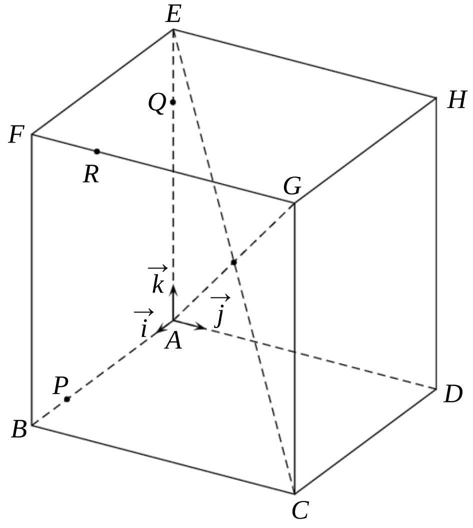
D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2021

---

④ On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 8 cm et de centre Ω.

Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8\,;2\,;8)$. Donner les coordonnées des points P et Q.

2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR).

3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4\,;4\,;4)$.

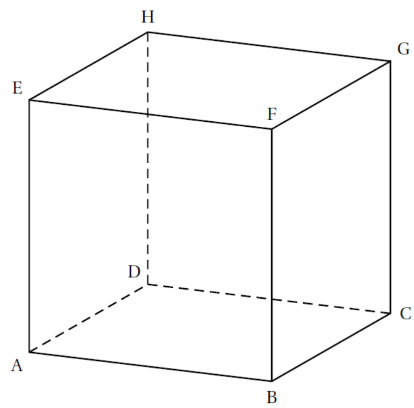
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.

3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{14}{3}\right)$.

4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

D'après Baccalauréat Asie 2021

⑤ Soit un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1\,;1\,;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$ et $P\left(1\,;0\,;-\frac{5}{4}\right)$.



1. **a.** Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.

b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

c. Démontrer que MNP est un triangle rectangle en un point qu'on précisera.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan (MNP).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

c. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

3. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

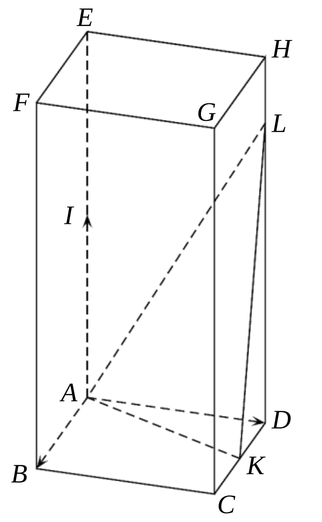
a. Justifier que K est le projeté orthogonal de F sur (MNP).

b. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\,;\frac{24}{35}\,;\frac{23}{35}\right)$.

c. On donne $FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$.
Calculer le volume du tétraèdre $MNPF$.

D'après Baccalauréat S Pondichéry 2015

⑥ On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, représenté ci- contre.



Le point I est milieu du segment $[AE]$.
Le point K est le milieu du segment $[DC]$.

Le point L est défini par $\overrightarrow{DL} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AI}$.

N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0\,;1\,;\dfrac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (AKL).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).

c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).

d. En déduire que le point N de coordonnées $\left(\dfrac{18}{49}\,;\dfrac{40}{49}\,;\dfrac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3} \times$ (aire de la base) $\times$ hauteur.

3. **a.** Calculer le volume du tétraèdre $ADKL$ en utilisant le triangle ADK comme base.

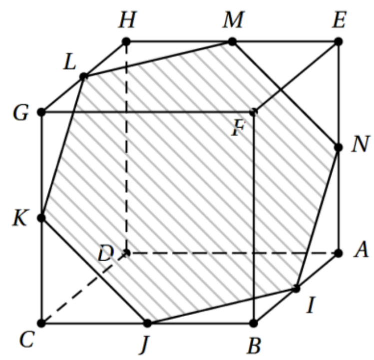
b. Calculer la distance du point D au plan (AKL).

c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

D'après Baccalauréat Asie 2021

---

⑦ $ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.
Dans ce repère, on a : $D(0\,;0\,;0)$, $C(1\,;0\,;0)$, $A(0\,;1\,;0)$, $H(0\,;0\,;1)$ et $E(0\,;1\,;1)$.
Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.
On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

2. On admet que deux plans parallèles coupent un troisième plan suivant deux droites parallèles.
Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

3. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

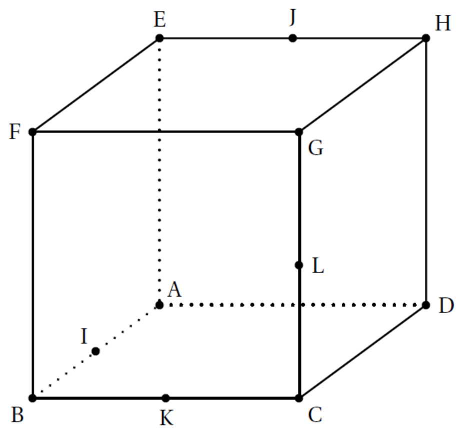
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

D'après Baccalauréat S Antilles 2016

⑧ $ABCDEFGH$ est un cube.

I est le milieu du segment $[AB]$, J est le milieu du segment $[EH]$, K est le milieu du segment $[BC]$ et L est le milieu du segment $[CG]$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. **a.** Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M et justifier qu'il est le projeté orthogonal de F sur le plan (IJK).

4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

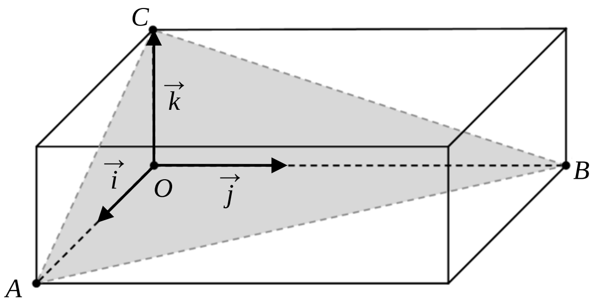
5. Calculer le volume du tétraèdre $FIJK$.

6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

D'après Baccalauréat S Liban 2015

---

⑨ Dans l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$, on considère les points A de coordonnées $(2\,;0\,;0)$, B de coordonnées $(0\,;3\,;0)$ et C de coordonnées $(0\,;0\,;1)$.



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\frac{12}{49}\,;\frac{36}{49}\right)$.

c. Calculer la distance OH.

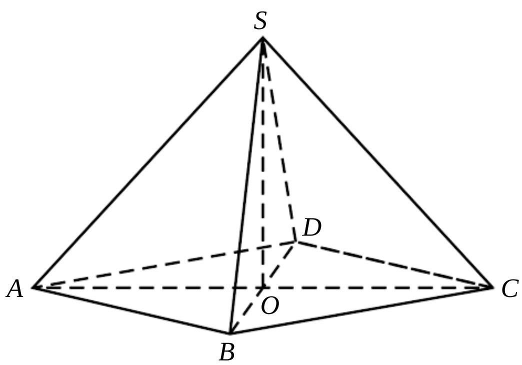
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}\,h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide $OABC$, déterminer l'aire du triangle ABC.

D'après Baccalauréat Mars 2021

---

⑩ **Partie A : un calcul de volume sans repère**

On considère une pyramide équilatère $SABCD$ (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.
Les diagonales du carré $ABCD$ mesurent 24 cm.
On note O le centre du carré $ABCD$.
On admettra que $OS = OA$.



1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

2. En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide $SABCD$.

Partie B : dans un repère

On considère le repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OS})$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments $[AS]$ et $[BS]$.

a. Justifier que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQC) .

b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQC) .

2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC) .

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (SH) .

b. Calculer les coordonnées du point H .

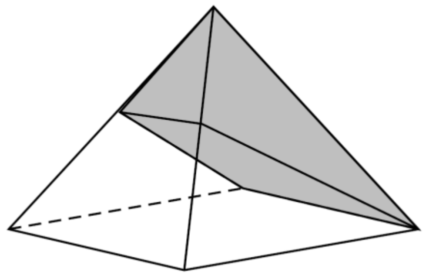
c. Montrer alors que la longueur SH , en unité de longueur, est $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

3. On admettra que l'aire du quadrilatère $PQCD$, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$.

Calculer le volume de la pyramide $SPQCD$, en unité de volume.

Partie C : partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.
Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :
« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».
Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.
Est-ce le cas ? Justifier la réponse.



D'après Baccalauréat Amérique du Sud 2016