Correction de **GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE - Fiche 6**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

---

① **1.** **a.** $4\times11 + 2\times8 + 5\times14 + 5 = 44 + 16 + 70 + 5 = 135 \neq 0$
donc A n'est pas sur $\mathscr{R}$.

b.
- $4\times(-1) + 2\times2 + 5\times(-1) + 5 = -4 + 4 - 5 + 5 = 0$
donc $B \in \mathscr{R}$.
- (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-11\\2-8\\-1-14\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-12\\-6\\-15\end{pmatrix}$.

D'après son équation cartésienne, $\mathscr{R}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB} = -3\,\vec{n}$
donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires
donc (AB) et $\mathscr{R}$ sont orthogonaux.

On en déduit que B est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{R}$.

c. B est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{R}$
donc la distance de A à $\mathscr{R}$ vaut $AB = \sqrt{(-12)^2 + (-6)^2 + (-15)^2} = \sqrt{405} = 9\sqrt{5}$.

---

2. **a.** D'après son équation cartésienne, $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}$.

(d) est orthogonale à $\mathscr{P}$ donc elle a pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}$ et elle passe par E

donc elle a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x = 3t + 6\\y = 5t + 3\\z = 3t + 4\end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. Posons F le projeté orthogonal de E sur $\mathscr{P}$.
F est le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et (d).

$F(x;y;z) \in \mathscr{P} \cap (d) \iff 3x + 5y + 3z - 2 = 0$ et $\begin{cases}x = 3t + 6\\y = 5t + 3\\z = 3t + 4\end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On en déduit :
$$3(3t + 6) + 5(5t + 3) + 3(3t + 4) - 2 = 0$$
$$\iff 9t + 18 + 25t + 15 + 9t + 12 - 2 = 0$$
$$\iff t = -1$$
On a alors $\begin{cases}x = 3\times(-1) + 6 = 3\\y = 5\times(-1) + 3 = -2\\z = 3\times(-1) + 4 = 1\end{cases}$
Donc, F a pour coordonnées $(3;-2;1)$.

c. F est le projeté orthogonal de E sur $\mathscr{P}$
donc la distance de E à $\mathscr{P}$ vaut $EF = \sqrt{(3-6)^2 + (-2-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{43}$.

---

② **1.** **a.** $\begin{cases}10 = t - 3\\4 = -3t - 5\\-6 = 2t + 1\end{cases} \iff \begin{cases}t = 13\\t = -3\\t = -3{,}5\end{cases}$: système faux
donc $R \notin (d)$.

b.
- $\begin{cases}-5 = t - 3\\1 = -3t - 5\\-3 = 2t + 1\end{cases} \iff \begin{cases}t = -2\\t = -2\\t = -2\end{cases}$: système vrai
donc $S \in (d)$.
- (RS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}-5-10\\1-4\\-3-(-6)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}-15\\-3\\3\end{pmatrix}$.

D'après sa représentation paramétrique, (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{RS}\cdot\vec{u} = -15\times1 + (-3)\times(-3) + 3\times2$
$= -15 + 9 + 6 = 0$
donc $\overrightarrow{RS}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux
donc (RS) et (d) sont orthogonales.

On en déduit que S est le projeté orthogonal de R sur (d).

c. S est le projeté orthogonal de R sur (d)
donc la distance de R à (d) vaut $RS = \sqrt{(-15)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$.

---

2. **a.** D'après sa représentation paramétrique, $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$.

$\mathscr{P}$ orthogonal à $\mathscr{D}$
donc il a pour vecteur normal $\vec{u}$
donc il a une équation cartésienne de la forme $-x + 3y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

$\mathscr{P}$ passe par A
donc $-0 + 3\times(-2) + 3 + d = 0$
$\Leftrightarrow d = 3$

On en déduit $\mathscr{P} : -x + 3y + z + 3 = 0$.

b. H projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$
donc H est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$.

$H(x\,;y\,;z) \in \mathscr{D} \cap \mathscr{P} \Leftrightarrow -x + 3y + z + 3 = 0$ et $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -9 + 3t \\ z = -4 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On en déduit :
$-(5 - t) + 3(-9 + 3t) + (-4 + t) + 3 = 0$
$\Leftrightarrow -5 + t - 27 + 9t - 4 + t + 3 = 0$
$\Leftrightarrow t = 3$

On a alors $\begin{cases} x = 5 - 3 = 2 \\ y = -9 + 3\times3 = 0 \\ z = -4 + 3 = -1 \end{cases}$

Donc, H a pour coordonnées $(2\,;0\,;-1)$.

c. H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$
donc la distance de A à $\mathscr{D}$ vaut $AH = \sqrt{(2-0)^2 + (0-(-2))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

---

③ **1.** D'après leurs représentations paramétriques, (d_1) a pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et (d_2) a pour vecteur directeur $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

$\frac{1}{1} = 1$ et $\frac{-2}{1} = -2$
donc $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires
donc (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

2. D'après son équation cartésienne, $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$.

$\vec{u_2} . \vec{n} = 1\times1 + 1\times3 + 2\times(-2)$
$= 1 + 3 - 4 = 0$
donc $\vec{u_2}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux
donc (d_2) est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

3.
- $4 + 3\times0 - 2\times3 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$
  donc $L \in \mathscr{P}$.
- (ML) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}4-5\\0-3\\3-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

  $\overrightarrow{ML} = -\vec{n}$
  donc $\overrightarrow{ML}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires
  donc (ML) et $\mathscr{P}$ sont orthogonaux.

On en déduit que L est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

④ **Partie I**

1. Par lecture graphique : $P\,(\,6\,;0\,;0\,)$ et $Q\,(\,0\,;0\,;6\,)$.

2. $$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}0-6\\0-0\\6-0\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}8-6\\2-0\\8-0\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\,.\,\vec{n} = -6\times1 + 0\times(-5) + 6\times1 = -6 + 6 = 0 \\ \overrightarrow{PR}\,.\,\vec{n} = 2\times1 + 2\times(-5) + 8\times1 = 2 - 10 + 8 = 0 \end{cases}$$

donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ vecteurs directeurs non colinéaires de (PQR)
donc $\vec{n}$ est normal à (PQR) .

3. $$\begin{cases} 6 - 5\times0 + 0 - 6 = 6 - 6 = 0 \\ 0 - 5\times0 + 6 - 6 = 6 - 6 = 0 \\ 8 - 5\times2 + 8 - 6 = 16 - 16 = 0 \end{cases}$$

donc les coordonnées de P , Q et R vérifient l'équation $x - 5y + z - 6 = 0$
donc $x - 5y + z - 6 = 0$ est bien une équation cartésienne de (PQR) .

Partie II

1. Ω centre de $ABCDEFGH$
donc Ω milieu de la diagonale $[AG]$ avec $A\,(\,0\,;0\,;0\,)$ et $G\,(\,8\,;8\,;8\,)$
donc $\Omega\left(\dfrac{0+8}{2}\,;\dfrac{0+8}{2}\,;\dfrac{0+8}{2}\right)$
donc $\Omega\,(\,4\,;4\,;4\,)$.

2. d perpendiculaire à (PQR)
donc elle a pour vecteur directeur le vecteur normal $\vec{n}$ de (PQR) et elle passe par Ω
donc elle a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 4 \\ y = -5t + 4 \\ z = t + 4 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. *Attention à ne pas écrire* $L\left(\dfrac{14}{3}\,;\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{14}{3}\right)$ *car c'est ce qu'on doit démontrer...*

1ère méthode : en vérifiant que le point $\left(\dfrac{14}{3}\,;\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{14}{3}\right)$ *est bien* L

Posons M le point de coordonnées $\left(\dfrac{14}{3}\,;\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{14}{3}\right)$.

- $\dfrac{14}{3} - 5\times\dfrac{2}{3} + \dfrac{14}{3} - 6 = \dfrac{14}{3} - \dfrac{10}{3} + \dfrac{14}{3} - \dfrac{18}{3} = 0$
  donc $M \in (PQR)$.
- $(M\Omega)$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{M\Omega}\begin{pmatrix}4-14/3\\4-2/3\\4-14/3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{M\Omega}\begin{pmatrix}-2/3\\10/3\\-2/3\end{pmatrix}$.
  $\dfrac{-\frac{2}{3}}{1} = -\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{\frac{10}{3}}{-5} = \; = -\dfrac{2}{3}$
  donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{M\Omega}$ sont colinéaires
  donc $(M\Omega)$ et (PQR) sont orthogonaux.

On en déduit que M est le projeté orthogonal L de Ω sur (PQR) .

2ème méthode : en déterminant les coordonnées du projeté orthogonal

L est le projeté orthogonal de Ω sur (PQR)
donc L est le point d'intersection de (PQR) et d .

$L\,(\,x\,;y\,;z\,) \in (PQR) \cap d \iff x - 5y + z - 6 = 0$ et $\begin{cases} x = t + 4 \\ y = -5t + 4 \\ z = t + 4 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On en déduit :

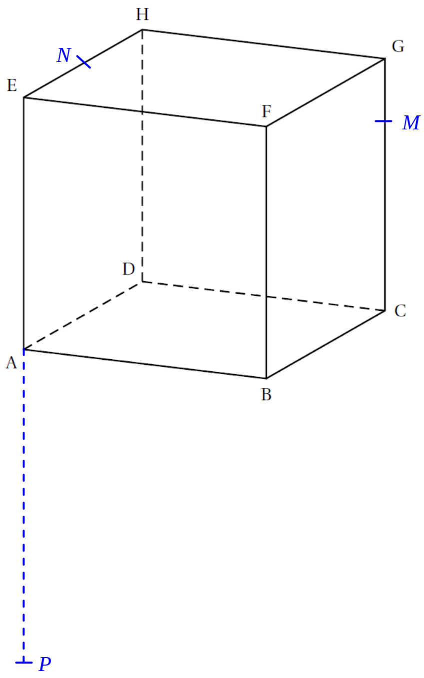
$$\begin{aligned} & (\,t + 4\,) - 5\,(\,-5t + 4\,) + (\,t + 4\,) - 6 = 0 \\ \iff\; & t + 4 + 25t - 20 + t + 4 - 6 = 0 \\ \iff\; & t = \frac{18}{27} \\ \iff\; & t = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On a alors $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + 4 = \dfrac{14}{3} \\ y = -5\times\dfrac{2}{3} + 4 = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{2}{3} + 4 = \dfrac{14}{3} \end{cases}$

Donc, L a pour coordonnées $\left(\dfrac{14}{3}\,;\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{14}{3}\right)$.

4. L est le projeté orthogonal de Ω sur (PQR)
donc la distance de Ω à (PQR) vaut $\Omega L = \sqrt{\left(\dfrac{14}{3} - 4\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3} - 4\right)^2 + \left(\dfrac{14}{3} - 4\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{9} + \dfrac{100}{9} + \dfrac{4}{9}} = 2\sqrt{3}$.

⑤ **1. a.**



b. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0-1\\1/2-1\\1-3/4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1/4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\-5/4-3/4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

c. Il n'est pas évident sur le dessin de voir en quel sommet MNP est rectangle.
Deux méthodes :
- le théorème de Pythagore nécessite le calcul de trois longueurs et permet donc de savoir quel est le côté le plus long qui deviendra l'hypoténuse.
  Mais ça fait beaucoup de calculs et la mise en place des calculs doit être bien organisée.
- le produit scalaire nul est très rapide mais encore faut-il savoir où est l'angle droit...

Mais la question **b.** serait-elle là par hasard ?

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP} = -1\times0 + (-\frac{1}{2})\times(-1) + \frac{1}{4}\times(-2)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux
donc MNP est rectangle en M.

2. a. $$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n} = -1\times5 + (-\frac{1}{2})\times(-8) + \frac{1}{4}\times4 = -5+4+1 = 0\\ \overrightarrow{MP}\cdot\vec{n} = 0\times5 + (-1)\times(-8) + (-2)\times4 = 8-8 = 0\end{cases}$$

donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ vecteurs directeurs non colinéaires de (MNP)
donc $\vec{n}$ est normal à (MNP).

b. (MNP) a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$

donc il a une équation cartésienne de la forme $5x - 8y + 4z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

(MNP) passe par M

donc $5\times1 - 8\times1 + 4\times\frac{3}{4} + d = 0$

$\Leftrightarrow d = 0$

On en déduit $(MNP) : 5x - 8y + 4z = 0$.

c. Δ passe par $F(1 ; 0 ; 1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$

donc elle a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x = 5t+1\\y = -8t\\z = 4t+1\end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. a.
- D'une part, K est sur (MNP).
- D'autre part, K et F sont sur Δ.
  Or, Δ a pour vecteur directeur $\vec{n}$ normal à (MNP)
  donc Δ est orthogonale à (MNP)
  donc (FK) est orthogonale à (MNP).

On en déduit que K est le projeté orthogonal de F sur (MNP).

b. $K(x\,;y\,;z) \in (MNP) \cap \Delta \iff 5x - 8y + 4z = 0$ et $\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = -8t \\ z = 4t + 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On en déduit :

$5(5t + 1) - 8(-8t) + 4(4t + 1) = 0$

$\iff 25t + 5 + 64t + 16t + 4 = 0$

$\iff t = \dfrac{-9}{105}$

$\iff t = -\dfrac{3}{35}$

On a alors $\begin{cases} x = 5\times(-\dfrac{3}{35}) + 1 = \dfrac{4}{7} \\ y = -8\times(-\dfrac{3}{35}) = \dfrac{24}{35} \\ z = 4\times(-\dfrac{3}{35}) + 1 = \dfrac{23}{35} \end{cases}$

Donc, K a pour coordonnées $(\dfrac{4}{7}\,;\dfrac{24}{35}\,;\dfrac{23}{35})$.

c. K est le projeté orthogonal de F sur (MNP) → N'oubliez pas de justifier la hauteur et la base utilisées.

donc $[FK]$ est la hauteur de $MNPF$ associée à la base MNP

donc :

$$\text{Volume de } MNPF = \frac{1}{3} \times FK \times \text{aire de } MNP$$

$$= \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{27}{35}} \times \frac{MN\times MP}{2} \quad \text{car } MNP \text{ rectangle en } M$$

$$= \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{27}{35}} \times \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2} \times \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}{2}$$

$$= \frac{3}{8}$$

---

⑥ **1.** Le verbe déterminer laisse penser qu'il faut justifier les coordonnées.

La méthode est de décomposer $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs du repère $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$.

- $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}$

$= \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ car K milieu de $[DC]$

$= \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL}$

$= \overrightarrow{AD} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AI}$

donc $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

2. **a.** $\begin{cases} \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AK} = 6\times\dfrac{1}{2} + (-3)\times1 + 2\times0 \\ \qquad = 3 - 3 = 0 \\ \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AL} = 6\times0 + (-3)\times1 + 2\times\dfrac{3}{2} \\ \qquad = -3 + 3 = 0 \end{cases}$

donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de (AKL)

donc $\vec{n}$ est normal à (AKL).

b. $\vec{n}$ normal à (AKL)

donc (AKL) a une équation cartésienne de la forme $6x - 3y + 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, $A(0\,;0\,;0) \in (AKL)$

donc $6\times0 - 3\times0 + 2\times0 + d = 0$

$\iff d = 0$

Donc $(AKL) : 6x - 3y + 2z = 0$.

c. Δ perpendiculaire à (AKL)

donc Δ a pour vecteur directeur $\vec{n}$ et passe par $D(0\,;1\,;0)$

donc Δ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 6t + 0 \\ y = -3t + 1 \\ z = 2t + 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 6t \\ y = -3t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

d. N est le projeté orthogonal de D sur (AKL)
donc N est le point d'intersection de (AKL) et Δ .

$N(x\,;y\,;z) \in (AKL)\cap\Delta \Leftrightarrow 6x-3y+2z=0$ et $\begin{cases} x=6t \\ y=-3t+1 \\ z=2t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

On en déduit :

$6(6t)-3(-3t+1)+2(2t)=0$

$\Leftrightarrow\ 36t+9t-3+4t=0$

$\Leftrightarrow\ t=\dfrac{3}{49}$

On a alors $\begin{cases} x=6\times\dfrac{3}{49}=\dfrac{18}{49} \\ y=-3\times\dfrac{3}{49}+1=\dfrac{40}{49} \\ z=2\times\dfrac{3}{49}=\dfrac{6}{49} \end{cases}$

Donc, N a pour coordonnées $\left(\dfrac{18}{49}\,;\dfrac{40}{49}\,;\dfrac{6}{49}\right)$.

3. a. L'arête (LD) est orthogonale à la face (ADK)
donc $[LD]$ est la hauteur de $ADKL$ associée à la base ADK
donc :

$$\begin{aligned}\text{Volume de } ADKL &= \frac{1}{3}\times LD\times \text{aire de } ADK \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{AD\times DK}{2} \quad \text{car } ADK \text{ rectangle en } D \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{1\times\frac{1}{2}}{2} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

b. N est le projeté orthogonal de D sur (AKL)
donc la distance de D à (AKL) vaut $DN=\sqrt{\left(\dfrac{18}{49}-0\right)^2+\left(\dfrac{40}{49}-1\right)^2+\left(\dfrac{6}{49}-0\right)^2}=\sqrt{\dfrac{324}{2\,401}+\dfrac{81}{2\,401}+\dfrac{36}{2\,401}}=\dfrac{3}{7}$.

c. *Question très classique à bien maîtriser...*
Vous avez deux expressions du volume de la même pyramide $ADKL$:
- *l'une avec la hauteur $[LD]$ et la base ADK qu'on a calculé précédemment et qui vaut $\dfrac{1}{8}$,*
- *l'autre avec la hauteur $[DN]$ et la base AKL qui est fonction de l'aire de AKL qu'on cherche.*

L'égalité de ces deux expressions donnera une équation d'inconnue aire de AKL .

N est le projeté orthogonal de D sur (AKL)
donc $[DN]$ est la hauteur de $ADKL$ associée à la base AKL
donc :

Volume de $ADKL = \dfrac{1}{3}\times DN\times$ aire de AKL

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{7}\times$ aire de AKL

$\Leftrightarrow$ aire de $AKL=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{3}{1}\times\dfrac{7}{3}$

$\Leftrightarrow$ aire de $AKL=\dfrac{7}{8}$

---

⑦ **1. a.**

$$\begin{cases} \overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DH} \text{ donc } \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\1-0\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}0-1\\1-1\\1-0\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BG}=1\times0+1\times(-1)+1\times1 \\ \qquad\qquad =-1+1=0 \\ \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BE}=1\times(-1)+1\times0+1\times1 \\ \qquad\qquad =-1+1=0 \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de (BGE)
donc $\overrightarrow{DF}$ est normal à (BGE) .

Autre méthode : sans utiliser les coordonnées

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BG} &= (\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}) \\ &= \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CG} \\ &= 0+0-1\times1+0+0+1\times1 \quad \text{par orthogonalité ou colinéarité}\end{aligned}$$

$= 0$

$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}) \cdot (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE})$

$= \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FE}$

$= 0 - 1\times1 + 0 + 0 + 1\times1 + 0$ par orthogonalité ou colinéarité

$= 0$

On conclut de même.

b. $\mathscr{P}$ est parallèle à (BGE) de vecteur normal $\overrightarrow{DF}$

donc $\overrightarrow{DF}$ normal à $\mathscr{P}$

donc $\mathscr{P}$ a une équation cartésienne de la forme $x + y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, $I\left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0\right) \in (BGE)$

donc $\frac{1}{2} + 1 + 0 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = -\frac{3}{2}$

Donc $(BGE) : x + y + z - \frac{3}{2} = 0$. → Qu'on pourrait écrire $2x + 2y + 2z - 3 = 0$.

2. $\begin{cases} \mathscr{P} \text{ parallèle à } (BGE) \\ \mathscr{P} \text{ coupe } (ABE) \text{ suivant la droite } (NI) \\ (BGE) \text{ coupe } (ABE) \text{ suivant la droite } (EB) \end{cases}$

donc $(NI) \,//\, (EB)$

De plus, I est le milieu de $[AB]$

donc, d'après le théorème de la droite des milieux dans le triangle ABE, N est le milieu de $[AE]$.

3. a. $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

donc (HB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{HB}$ et passe par $H(0 ; 0 ; 1)$ → On pouvait utiliser $B(1 ; 1 ; 0)$.

donc (HB) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1t + 0 \\ y = 1t + 0 \\ z = -1t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{DF} = 1\times1 + 1\times1 + (-1)\times1$

$= 1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$

donc le vecteur directeur $\overrightarrow{HB}$ de (HB) et le vecteur normal $\overrightarrow{DF}$ de $\mathscr{P}$ ne sont pas orthogonaux

donc (HB) et $\mathscr{P}$ sont sécants.

$M(x ; y ; z) \in \mathscr{P} \cap (HB) \Leftrightarrow x + y + z - \frac{3}{2} = 0$ et $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On en déduit :

$t + t + (-t + 1) - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow t + 1 - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

On a alors $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc, le point d'intersection a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

4. Aucune utilisation de projeté orthogonal ici !

La situation est élémentaire...

$[BF]$ est la hauteur de $FBGE$ associée à la base GFE

donc :

Volume de $FBGE$ $= \frac{1}{3} \times BF \times$ aire de GFE

$= \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{FG \times FE}{2}$ car GFE rectangle en F

$= \frac{1}{3} \times \frac{1 \times 1}{2}$

$= \frac{1}{6}$

⑧ **1** **a.** 1ère méthode : avec coordonnées

$\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0-1/2\\1/2-0\\1-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1-1/2\\1/2-0\\0-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{FD}\,.\,\overrightarrow{IJ} = -1\times(-\frac{1}{2}) + 1\times\frac{1}{2} + (-1)\times 1\\ \qquad = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1 = 0\\ \overrightarrow{FD}\,.\,\overrightarrow{IK} = -1\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} + (-1)\times 0\\ \qquad = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0\end{cases}$$

donc $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de (IJK)
donc (FD) est orthogonale à (IJK) .

2ème méthode : sans coordonnées

$$\overrightarrow{FD}\,.\,\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\,.\,(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EJ})$$
$$= \overrightarrow{FB}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{FB}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FB}.\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{EJ}$$
$$= 0 - 1\times 1 + 0 + 0 + 0 + 1\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} + 0 + 0$$

par orthogonalité ou colinéarité

$$= -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

On fait de même avec $\overrightarrow{FD}\,.\,\overrightarrow{IK}$ et on conclut de même.

b. (FD) est orthogonale à (IJK)
donc $\overrightarrow{FD}$ normal à (IJK)
donc (IJK) a une équation cartésienne de la forme $-x+y-z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

De plus, $I\,(\frac{1}{2}\,;0\,;0)\in(IJK)$

donc $-\frac{1}{2}+0-0+d=0$

$\Leftrightarrow d=\frac{1}{2}$

Donc $(IJK) : -x+y-z+\frac{1}{2}=0$. → Qu'on pourrait écrire $-2x+2y-2z+1=0$ ou $2x-2y+2z-1=0$.

2. (FD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{FD}$ et passe par $D\,(0\,;1\,;0)$ → On pouvait utiliser $F\,(1\,;0\,;1)$.

donc (FD) a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=-1t+0\\y=1t+1\\z=-1t+0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-t\\y=t+1\\z=-t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

3. • $M\,(x\,;y\,;z)\in(IJK)\cap(FD) \Leftrightarrow -x+y-z+\frac{1}{2}=0$ et $\begin{cases}x=-t\\y=t+1\\z=-t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

On en déduit :

$-(-t)+(t+1)-(-t)+\frac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow t+t+1+t+\frac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow 3t=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$

On a alors $\begin{cases}x=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\\z=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\end{cases}$

Donc, $M\,(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2})$.

• D'une part, M est sur (IJK) .

D'autre part, M est sur (FD) qui est orthogonale à (IJK)
donc (FM) est orthogonale à (IJK) .

On en déduit que M est le projeté orthogonal de F sur (IJK) .

4. Comme il faudra calculer l'aire de IJK, on peut se douter qu'il doit être rectangle.
Mais pas facile sur le schéma de repérer si l'angle droit est en I ou en K.
Le mieux est de calculer au brouillon $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}$ et de ne faire apparaître sur la copie que celui qui convient :

- $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times 0 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 0$
  donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont orthogonaux
  et donc IJK rectangle en I.

On pouvait aussi calculer IJ, IK et JK
puis appliquer la réciproque du théorème de Pythagore.
Un peu plus long…

- On en déduit que :

$$\text{aire de } IJK = \frac{IJ\times IK}{2} = \frac{\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+1^2}\times\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+0^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

5. M est le projeté orthogonal de F sur (IJK)
donc $[FM]$ est la hauteur de $FIJK$ associée à la base IJK
donc :

$$\text{Volume de } FIJK = \frac{1}{3}\times FM\times \text{aire de } ADK = \frac{1}{3}\times\sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+(\frac{1}{2}-0)^2+(\frac{1}{2}-1)^2}\times\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{3}{4}}\times\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{8}$$

6. Attention ! Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ ne sont pas colinéaires permet de dire que les droites (IJ) et (KL) ne sont pas parallèles mais pas qu'elles sont sécantes…
La seule méthode est de chercher d'<u>**éventuelles**</u> coordonnées de point d'intersection avec les représentations paramétriques.

- (IJ) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}$ et passe par I

  donc (IJ) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}t+0 \\ z = 1t+0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

- $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1/2 \\ 1/2-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

  (KL) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{KL}$ et passe par K

  donc (KL) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0s+1 \\ y = \frac{1}{2}s+\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2}s+0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2}s+\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2}s \end{cases}$ avec $s\in\mathbb{R}$. → Pensez à changer de paramètre…

- Mise en équation : → Attention, cette précaution est indispensable car on ne sait pas au départ si le point d'intersection existe !!!

$$R(x\,;y\,;z)\in(IJ)\cap(KL) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2}s+\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2}s \end{cases} \text{ avec } t \text{ et } s \text{ réels}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} = 1 \\ \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}s+\frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2}s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 & \rightarrow \text{Je trouve facilement la valeur de } t. \\ \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}s+\frac{1}{2} & \rightarrow \text{Je "gèle" la } 2^{\text{ème}} \text{ équation.} \\ -1 = \frac{1}{2}s & \rightarrow \text{Je la remplace dans la } 3^{\text{ème}} \text{ équation.} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ s = -2 \end{cases}$$ → Je trouve la valeur de s.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ s = -2 \end{cases}$$ → Je trouve la valeur de s.

Or, $\begin{cases} \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \times (-2) + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ donc la 2ème équation est vérifiée

donc le système est vérifié

donc (IJ) et (KL) sont sécantes.

Ce n'est pas demandé mais on peut trouver les coordonnées du point d'intersection en remplaçant t par -1 dans la représentation paramétrique de (IJ) ou en remplaçant s par -2 dans celle de (KL).

On trouve $(1 ; -\frac{1}{2} ; 1)$.

---

⑨ **1** **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 3-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 3\times(-2) + 2\times3 + 6\times0 \\ \qquad = -6 + 6 + 0 = 0 \\ \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 3\times(-2) + 2\times0 + 6\times1 \\ \qquad = -6 + 0 + 6 = 0 \end{cases}$$

donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de (ABC)

donc $\vec{n}$ est normal à (ABC).

b. $\vec{n}$ normal à (ABC)

donc (ABC) a une équation cartésienne de la forme $3x + 2y + 6z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, $A \in (ABC)$

donc $3\times2 + 2\times0 + 6\times0 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = -6$

Donc $(ABC) : 3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

2. **a.** d orthogonale à (ABC)

donc d a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$ normal à (ABC) et elle passe par O

donc d a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3t + 0 \\ y = 2t + 0 \\ z = 6t + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. $H(x ; y ; z) \in (ABC) \cap d \Leftrightarrow 3x + 2y + 6z - 6 = 0$ et $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On en déduit :

$3\times3t + 2\times2t + 6\times6t - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 49t = 6$

$\Leftrightarrow t = \frac{6}{49}$

On a alors $\begin{cases} x = 3\times\frac{6}{49} = \frac{18}{49} \\ y = 2\times\frac{6}{49} = \frac{12}{49} \\ z = 6\times\frac{6}{49} = \frac{36}{49} \end{cases}$

Donc, $H(\frac{18}{49} ; \frac{12}{49} ; \frac{36}{49})$.

c. $OH = \sqrt{(\frac{18}{49} - 0)^2 + (\frac{12}{49} - 0)^2 + (\frac{36}{49} - 0)^2}$

$= \sqrt{\frac{324}{2\,401} + \frac{144}{2\,401} + \frac{1\,296}{2\,401}}$

$= \frac{42}{49}$

3.

- L'arête (OC) est orthogonale à la face (OAB)
  donc $[OC]$ est la hauteur de $OABC$ associée à la base OAB
  donc :

$$\begin{aligned}\text{Volume de } OABC &= \frac{1}{3} \times OC \times \text{aire de } OAB \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{OA \times OB}{2} \quad \text{car } OAB \text{ rectangle en } O \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{2 \times 3}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

- D'une part, H est sur (ABC) .

  D'autre part, O et H sont sur d qui est orthogonale à (ABC)
  donc (OH) est orthogonale à (ABC) .

  On en déduit que H est le projeté orthogonal de O sur (ABC) .
  donc $[OH]$ est la hauteur de $OABC$ associée à la base ABC
  donc :

$$\text{Volume de } OABC = \frac{1}{3} \times OH \times \text{aire de } ABC$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{3} \times \frac{42}{49} \times \text{aire de } ABC$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{aire de } ABC = 1 \times \frac{3}{1} \times \frac{49}{42}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{aire de } ABC = \frac{7}{2}$$