Savoir DÉTERMINER ET UTILISER DES VECTEURS NORMAUX DE PLANS ET DES ÉQUATIONS DE PLANS

Ce que je dois savoir faire

- **Déterminer un vecteur normal à un plan**

  - Si on connaît une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, alors un vecteur normal est $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, c'est très facile !

    Vous pouvez alors en déduire des choses sur le plan (voir ci-dessous les positions relatives).

  - Mais si vous n'avez pas d'équation cartésienne ou, pire, vous avez besoin d'un vecteur normal pour trouver une équation cartésienne :

    1ère situation : l'énoncé vous donne un vecteur et vous devez vérifier que c'est un vecteur normal à un plan (ABC).
    Il suffit de vérifier qu'il est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires (avec deux produits scalaires nuls).

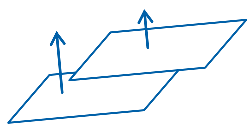
    2ème situation : l'énoncé vous dit que le plan est orthogonal à une droite.
    Alors, un vecteur directeur de la droite est vecteur normal de votre plan.

    3ème situation : l'énoncé vous dit que le plan est parallèle à un autre plan.
    Alors, un vecteur normal de cet autre plan est vecteur normal de votre plan.

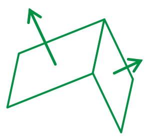
    4ème situation : vous n'avez rien d'autre que trois points du plan.
    C'est la situation difficile, non évaluée au baccalauréat (voir à la fin de la fiche).

- Utiliser des vecteurs normaux pour **étudier des positions relatives de deux plans**

  Soit deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$.

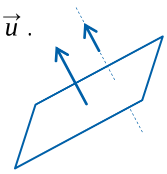


  - Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ colinéaires, alors $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ parallèles.
  - Réciproquement, si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ non colinéaires, alors $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ non parallèles et donc sécants.
  - Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ orthogonaux, alors $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sécants orthogonaux.



- Utiliser un vecteur normal et un vecteur directeur pour **étudier des positions relatives d'un plan et d'une droite**

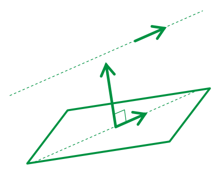
  Soit un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$.



  - Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ colinéaires, alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ orthogonaux.

    Remarque : Voir fiche **E6** sur les projetés orthogonaux.

  - Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ orthogonaux, alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ parallèles.
  - *Contraposée* : si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ non orthogonaux, alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ non parallèles et donc sécants.



  Retenez bien les schémas, ils vous aideront à ne pas confondre l'utilisation de la colinéarité et de l'orthogonalité.

- **Déterminer une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$**

  - Si $\mathscr{P}$ contient le point $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ (donnés dans l'énoncé) :

    - alors $\mathscr{P}$ a une équation cartésienne de la forme $px + qy + rz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$;
    - et on obtient d en remplaçant x, y et z par x_A, y_A et z_A puis en résolvant l'équation d'inconnue d.

  - S'il n'est pas donné dans l'énoncé, voir les situations précédemment.

- Utiliser une équation cartésienne pour **déterminer si un point est sur un plan**

  On teste les coordonnées du point dans l'équation cartésienne.

  ⚠ Attention à bien repérer le sens de l'équivalence $M\,(x\,;y\,;z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$.

  Si vous voulez savoir si un point est sur le plan (sens ⇐), vous ne pouvez pas écrire au départ le « $= 0$ ».

  Dans certaines situations, vous savez qu'un point est sur le plan (sens ⇒), vous devez écrire au départ le « $= 0$ ».
  Cela sert alors d'équation pour trouver la valeur d'une lettre (le d ci-dessus, ou le paramètre t d'une droite).

- Utiliser $\left\{\begin{array}{l}\text{une équation cartésienne}\\ \text{une représentation paramétrique}\end{array}\right.$ pour **calculer les coordonnées du point d'intersection** $\left\{\begin{array}{l}\textbf{d'un plan}\\ \textbf{d'une droite}\end{array}\right.$ **sécants**
  - Si besoin, démontrez d'abord qu'ils sont sécants (voir précédemment).
  - Comme d'habitude avec les points d'intersection :

    équation de $\mathscr{P}$ — représentation paramétrique de $\mathscr{D}$

    $$M(x;y;z) \in \mathscr{P} \cap \mathscr{D} \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x = et + f \\ y = gt + h \\ z = it + j \end{array}\right. \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$
  - Comme on sait qu'il y aura une solution, on abandonne les trop lourdes équivalences : on en déduit une équation d'inconnue t en remplaçant x, y et z par les expressions fonctions de t dans $ax + by + cz + d = 0$.
    On en déduit les valeurs de x, y et z en remplaçant t dans $et + f$, $gt + h$ et $it + j$ par la valeur trouvée.

  Remarque : Bien sûr, si par chance on vous donne le point (par exemple dans un QCM), il suffit de vérifier ses coordonnées dans l'équation cartésienne du plan et dans la représentation paramétrique de la droite.

Remarques sur les exercices

- L'exercice ① permet de mettre en pratique toutes les techniques de base et de vérifier la rédaction.
- Les exercices ② à ⑦ sont des exercices de baccalauréat.
  L'exercice ② propose cinq Vrai-Faux.
  Les exercices ③ à ⑥ se situent dans le repère d'un solide.
- Les exercices ❽ et ❾ en toute fin de fiche proposent des situations non posées au baccalauréat.

---

① Les exercices **1.** à **9.** sont indépendants et se placent dans un repère orthonormé de l'espace.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par le point $M(-5;1;3)$ et le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$.

2. On donne les points $A(1,2;-0,5;-4)$ et $B(-1;1;8)$.
Ces points appartiennent-ils au plan $\mathscr{P}$ d'équation $-5x + 2y - z + 3 = 0$?

3. Déterminer un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $-x + 2y + z - 5 = 0$.

4. On donne les points $R(-1;-1;2)$, $S(0;-2;1)$ et $T(4;0;-1)$.

a. Montrer que R, S et T définissent un plan.

b. Montrer que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (RST).

c. En déduire une équation cartésienne du plan (RST).

5. Soit les plans $\mathscr{P}_1 : 2x - y - z + 1 = 0$, $\mathscr{P}_2 : -4x + 2y + 2z + 4 = 0$ et $\mathscr{P}_3 : 3x + 4y + 2z - 7 = 0$.

a. Montrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles.

b. Montrer que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont sécants.

c. Montrer de plus que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont orthogonaux.

6. Soit le plan $\mathscr{P} : 3x - y + z - 5 = 0$ et le point $K(2;-1;2)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{R}$ parallèle à $\mathscr{P}$ passant par K.

7. Soit les points $E(-5;3;1)$ et $F(1;0;-3)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ orthogonal à (EF) passant par E.

8. Soit les plans $\mathscr{P}_1 : 3x + y - z - 2 = 0$ et $\mathscr{P}_2 : -x + 2z - 1 = 0$.
Soit les droites (Δ) et (δ) de représentations paramétriques respectives

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 - 6t \\ y = -2t \\ z = 5 + 2t \end{array}\right. \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x = 2s - 1 \\ y = 3s \\ z = s + 1 \end{array}\right. \text{ avec } s \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que (Δ) est orthogonale à $\mathscr{P}_1$.

b. Montrer que (δ) est parallèle à $\mathscr{P}_2$.

c. Montrer que (δ) coupe $\mathscr{P}_1$ et n'est pas orthogonale à $\mathscr{P}_1$.

9. Soit le plan $\mathscr{P} : 4x - y - z - 4 = 0$ et la droite $(d) : \begin{cases} x = -t + 5 \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la droite (d) coupe le plan $\mathscr{P}$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (d) et $\mathscr{P}$.

---

② *Dans chaque exercice, une affirmation est donnée.*
Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. L'espace est rapporté à un repère orthonormal et on considère la droite $\mathscr{D}$ qui admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation : La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan d'équation $x + 2y + z - 3 = 0$.

D'après Baccalauréat S Centres Étrangers 2016

2. On munit l'espace d'un repère orthonormé et on considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $x + y + z - 5 = 0$ et $7x - 2y + z - 2 = 0$.

Affirmation 1 : Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

Affirmation 2 : Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t + 4 \end{cases} , t \in \mathbb{R} .$$

Vous ne savez pas trouver la représentation paramétrique de la droite intersection de deux plans (voir à la fin de la fiche). Il faut bien sûr utiliser la représentation paramétrique proposée.
Deux méthodes :
- trouver <u>deux points</u> de la droite (voir la fiche E4) et tester s'ils appartiennent aux deux plans ;
- tester directement si <u>tous les points</u> de la droite (de coordonnées $(t ; 2t + 1 ; -3t + 4)$) appartiennent aux deux plans.

D'après Baccalauréat S Asie 2015

3. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on donne les points :

$A (1 ; 2 ; 3)$, $B (3 ; 0 ; 1)$, $C (-1 ; 0 ; 1)$, $D (2 ; 1 ; -1)$, $E (-1 ; -2 ; 3)$ et $F (-2 ; -3 ; 4)$.

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

Affirmation 2 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment $[BC]$.

D'après Baccalauréat S Métropole 2016

4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.
Les points A , B , C sont définis par leurs coordonnées : $A (3 ; -1 ; 4)$, $B (-1 ; 2 ; -3)$, $C (4 ; -1 ; 2)$.
Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $2x - 3y + 2z - 7 = 0$.
La droite Δ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

Affirmation 2 : Les points A , B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x + 5y + z - 5 = 0$.

Affirmation 3 : Tous les points dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient $\begin{cases} x = 1 + s - 2s' \\ y = 1 - 2s + s' \\ z = 1 - 4s + 2s' \end{cases}$, avec s et s' réels, appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 : Il existe un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ qui contient la droite Δ .

D'après Baccalauréat S Amérique du Sud 2015

5. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

On note d la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

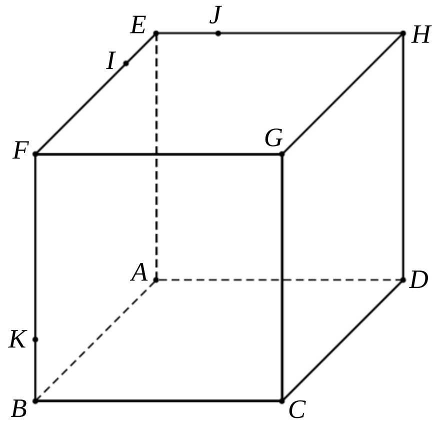
On note d' la droite passant par le point $B (4 ; 4 ; -6)$ et de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Affirmation : « Les droites d et d' sont coplanaires. »

D'après Baccalauréat S Métropole Septembre 2019

---

③ On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.
On donne trois points I, J et K vérifiant :
$\overrightarrow{RI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{EH}$; $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BF}$.
On se place dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).

5. En déduire les coordonnées du point L, point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJK).

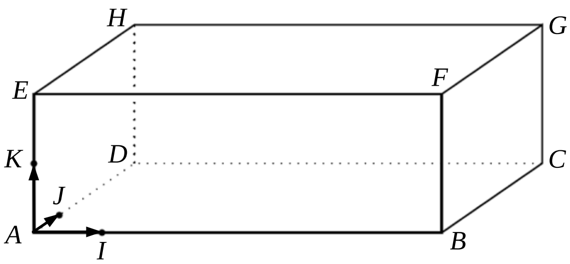
6. Soit $M (\frac{1}{4} ; 1 ; 0)$. Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2021

---

④ On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous, pour lequel $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$.
I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB}$,
$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AE}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$.



1. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).

2. Déterminer une équation du plan (IJG).

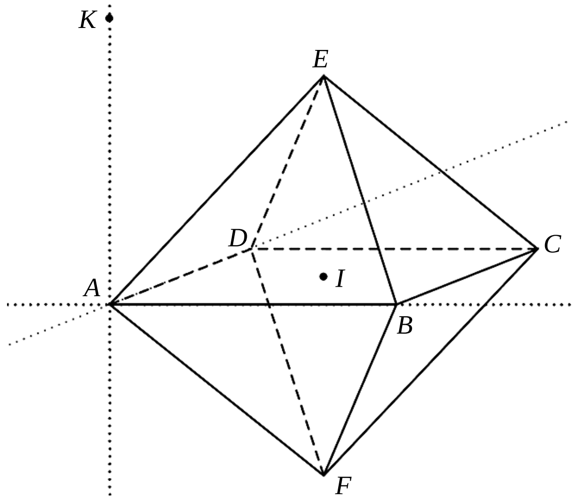
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BF).

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).

D'après Baccalauréat S Polynésie 2015

---

⑤ On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre I et dont toutes les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AK})$.



1. Montrer que $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

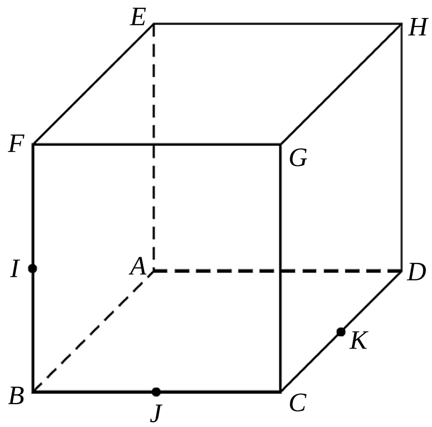
En déduire les coordonnées des points I, E et F.

2. Montrer que $-2y + \sqrt{2}\, z = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABE).

3. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

D'après Baccalauréat S Liban 2016

⑥ $ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.
Le point K est le milieu du segment $[CD]$.



L'espace est rapporté au repère $(A ; \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées de A , G , I , J et K dans ce repère.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) .

b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK) .

3. On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG}$.

a. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.

b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N (\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$.

4. Démontrer que pour ce point $N (\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$:

a. N appartient au plan (IJK) .

b. La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF) .

D'après Baccalauréat Pondichéry 2016

---

⑦ Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points $A (0 ; 1 ; -1)$ et $B (-2 ; 2 ; -1)$,
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .

2. **a.** Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.

b. Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathscr{D}$ de coordonnées $(-2 + u ; 1 + u ; -1 - u)$.

3. Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - z - 3u = 0$ est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$ et passe par le point M .

4. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4 + 6u ; 3 - 3u ; -1)$.

5. **a.** Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$.

b. Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?

6. **a.** Exprimer MN^2 en fonction de u .

b. En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2015

Deux savoir-faire difficiles

- **Déterminer un vecteur normal à un plan (ABC)** dont on n'a que les coordonnées des points

  - On pose $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (ABC).
  - On écrit $\begin{cases} \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ qu'on traduit en coordonnées.
  - On obtient un système de 2 équations à 3 inconnues a, b et c.
    Cela veut dire qu'une des inconnues servira de paramètre.
    Par exemple, vous obtiendrez $\begin{cases} a = \text{fonction de } c \\ b = \text{fonction de } c \end{cases}$.
    Ne vous étonnez pas de trouver quelque chose comme $\vec{n}\begin{pmatrix} 2c \\ 3c \\ c \end{pmatrix}$, vous avez en fait <u>tous</u> les vecteurs normaux, qui sont bien sûr colinéaires.
  - Il suffit de choisir une valeur particulière pour c (pas 0 s'il vous plaît !) et vous obtenez <u>un</u> vecteur normal.

- **Déterminer la représentation paramétrique d'une droite intersection de deux plans sécants**

  - Si on a $\mathscr{P}_1 : ax + by + cz + d = 0$ et $\mathscr{P}_2 : ex + fy + gz + h = 0$,
    on fait la mise en équation suivante (mais on sait que M existe) :
    $$M\,(x\,;y\,;z) \in \mathscr{P} \cap (d) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ex + fy + gz + h = 0 \end{cases}$$
  - On obtient un système de 2 équations à 3 inconnues x, y et z.
    Cela veut dire qu'une des inconnues servira de paramètre.
    Par exemple, vous obtiendrez : $\begin{cases} x = \text{fonction de } z \\ y = \text{fonction de } z \end{cases}$ avec $z \in \mathbb{R}$.
  - ⚠ Il faut retenir les deux astuces suivantes :
    - On ajoute l'équation $z = z$ toujours vraie : $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{fonction de } z \\ y = \text{fonction de } z \\ z = z \end{cases}$ avec $z \in \mathbb{R}$
    - Puis, on remplace les z de droite par un t : $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{fonction de } t \\ y = \text{fonction de } t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

---

8 Dans un repère orthonormé de l'espace, on définit les points $E\,(-1\,;2\,;6)$, $F\,(2\,;0\,;-5)$ et $G\,(1\,;1\,;-1)$.

a. Montrer que ces trois points définissent un plan.

b. Déterminer un vecteur normal à (EFG).

c. En déduire une équation cartésienne de (EFG).

---

9 On se place dans un repère orthonormé de l'espace.

Soit les plans $\mathscr{P} : -x + 2y - 2z - 1 = 0$ et $\mathscr{P}' : x - 3y + z + 2 = 0$.

a. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.