Correction de GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE - Fiche 5

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ❽ ❾

① **1.** $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathscr{P}$

donc $\mathscr{P}$ a une équation cartésienne de la forme $2x+5y-z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

$M\in\mathscr{P}$ donc $2\times(-5)+5\times1-3+d=0$
$\Leftrightarrow d=8$.

Donc $\mathscr{P} : 2x+5y-z+8=0$. → Je n'oublie pas de conclure.

2.
- $-5\times1{,}2+2\times(-0{,}5)-(-4)+3=-6-1+4+3=0$
  donc $A\in\mathscr{P}$.
- $-5\times(-1)+2\times1-8+3=5+2-8+3=2\neq0$
  donc $B\notin\mathscr{P}$.

---

3. $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $-x+2y+z-5=0$

donc un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

---

4. **a.** $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}0-(-1)\\-2-(-1)\\1-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}4-(-1)\\0-(-1)\\-1-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix}$

$\frac{5}{1}\neq\frac{-2}{-1}$

donc $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas colinéaires
donc R, S et T non alignés
donc R, S et T définissent un plan.

b. $\begin{cases}\vec{w}\cdot\overrightarrow{RS} = 2\times1+(-1)\times(-1)+3\times(-1)\\ \qquad = 2+1-3 = 0\\ \vec{w}\cdot\overrightarrow{RT} = 2\times5+(-1)\times1+3\times(-3)\\ \qquad = 10-1-9 = 0\end{cases}$

donc $\vec{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ non colinéaires
donc $\vec{w}$ est normal au plan (RST).

c. $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathscr{P}$

donc (RST) a une équation cartésienne de la forme $2x-y+3z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

$R\in(RST)$ donc $2\times(-1)-(-1)+3\times2+d=0$
$\Leftrightarrow d=-5$.

Donc $(RST) : 2x-y+3z-5=0$.

---

5. **a.**
- $\mathscr{P}_1$ a pour équation cartésienne $2x-y-z+1=0$

  donc un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ est $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.
- $\mathscr{P}_2$ a pour équation cartésienne $-4x+2y+2z+4=0$

  donc un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$ est $\vec{n_2}\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$.
- On voit que $\vec{n_2}=-2\,\vec{n_1}$
  donc $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires
  donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles.

b.
- $\mathscr{P}_3$ a pour équation cartésienne $3x+4y+2z-7=0$

  donc un vecteur normal à $\mathscr{P}_3$ est $\vec{n_3}\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$.
- $\frac{3}{2}\neq\frac{4}{-1}$ donc $\vec{n_1}$ et $\vec{n_3}$ ne sont pas colinéaires
  donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ ne sont pas parallèles, donc ils sont sécants.

c. $\vec{n_1} \cdot \vec{n_3} = 2\times3 + (-1)\times4 + (-1)\times2$
$= 6 - 4 - 2$
$= 0$

donc $\vec{n_1}$ et $\vec{n_3}$ sont orthogonaux
donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont orthogonaux.

6.
- $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $3x - y + z - 5 = 0$
  donc un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$.
- $\mathscr{R}$ parallèle à $\mathscr{P}$
  donc $\vec{n}$ est aussi vecteur normal à $\mathscr{R}$
  donc $\mathscr{R}$ a une équation cartésienne de la forme $3x - y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
- $K \in \mathscr{R}$ donc $3\times2 - (-1) + 2 + d = 0$
  $\Leftrightarrow d = -9$.

Donc $\mathscr{R} : 3x - y + z - 9 = 0$.

7.
- (EF) a pour vecteur directeur $\vec{EF}\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\end{pmatrix}$.
- $\mathscr{P}$ orthogonal à (EF)
  donc $\vec{EF}$ est vecteur normal à $\mathscr{P}$
  donc $\mathscr{P}$ a une équation cartésienne de la forme $6x - 3y - 4z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
- $E \in \mathscr{P}$ donc $6\times(-5) - 3\times3 - 4\times1 + d = 0$
  $\Leftrightarrow d = -43$.

Donc $\mathscr{R} : 6x - 3y - 4z - 43 = 0$.

---

8. **a.**
- $\mathscr{P}_1$ a pour équation cartésienne $3x + y - z - 2 = 0$
  donc un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ est $\vec{n_1}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$.
- D'après sa représentation paramétrique, (Δ) a pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-6\\-2\\2\end{pmatrix}$.
- On voit que $\vec{u_1} = -2\,\vec{n_1}$
  donc $\vec{n_1}$ et $\vec{u_1}$ sont colinéaires
  donc (Δ) est orthogonale à $\mathscr{P}_1$.

b.
- $\mathscr{P}_2$ a pour équation cartésienne $-x + 2z - 1 = 0$
  donc un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$ est $\vec{n_2}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.
- D'après sa représentation paramétrique, (δ) a pour vecteur directeur $\vec{u_2}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.
- $\vec{n_2} \cdot \vec{u_2} = -1\times2 + 0\times3 + 2\times1$
  $= -2 + 2$
  $= 0$
  donc $\vec{n_2}$ et $\vec{u_2}$ sont orthogonaux
  donc (δ) est parallèle à $\mathscr{P}_2$.

c.
- $\vec{n_1} \cdot \vec{u_2} = 3\times2 + 1\times3 + 1\times1$
  $= 6 + 3 + 1$
  $= 10 \neq 0$
  donc $\vec{n_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas orthogonaux
  donc (δ) n'est pas parallèle à $\mathscr{P}_1$
  donc (δ) coupe $\mathscr{P}_1$.
- $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{3}$ donc $\vec{n_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires
  donc (δ) n'est pas orthogonale à $\mathscr{P}_1$.

---

9. **a.**
- $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $4x - y - z - 4 = 0$
  donc un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$.
- D'après sa représentation paramétrique, (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

- $\vec{n}\,.\,\vec{u} = 4\times(-1)+(-1)\times 2+(-1)\times 1$
  $= -4-1-1$
  $= -6 \neq 0$

  donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux
  donc (d) n'est pas parallèle à $\mathscr{P}$ et donc (d) coupe $\mathscr{P}$.

b. $M(x\,;y\,;z) \in \mathscr{P}\cap(d) \Leftrightarrow 4x-y-z-4=0$ et $\begin{cases} x=-t+5 \\ y=2t-1 \\ z=t+3 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

On en déduit :

$4(-t+5)-(2t-1)-(t+3)-4=0$ → J'injecte les expressions de x, y et z dans l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

$\Leftrightarrow \quad t=2$ → Inutile de détailler cette équation niveau 4ème…

On a alors $\begin{cases} x=-2+5=3 \\ y=2\times 2-1=3 \\ z=2+3=5 \end{cases}$ → J'injecte la valeur de t dans les trois expressions de x, y et z.

Le point d'intersection a donc pour coordonnées $(3\,;3\,;5)$. → Je conclus proprement.

---

② **1.** L'affirmation est vraie.
Voir l'exercice ① **8. b.** .

2.
- L'affirmation 1 est fausse.
  Voir l'exercice ① **5. c.** .

- L'affirmation 2 est vraie.
  Voir l'exercice ① **5. b.** pour démontrer qu'ils sont sécants.
  Pour démontrer que la droite est bien l'intersection des deux plans :

  Méthode 1 : on trouve deux points de cette droite et on teste leurs coordonnées dans chaque équation de plan

  Pour $t=0$, on a $\begin{cases} x=0 \\ y=2\times 0+1=1 \\ z=-3\times 0+4=4 \end{cases}$ → Je choisis $t=0$ et j'injecte 0 dans les trois expressions de x, y et z.

  Pour $t=1$, on a $\begin{cases} x=1 \\ y=2\times 1+1=3 \\ z=-3\times 1+4=1 \end{cases}$ → Je choisis $t=1$ et j'injecte 1 dans les trois expressions de x, y et z.

  Donc la droite est la droite (AB) avec $A(0\,;1\,;4)$ et $B(1\,;3\,;1)$.

  $$\begin{cases} 0+1+4-5=5-5=0 \text{ donc } A\in\mathscr{P}_1 \\ 7\times 0-2\times 1+4-2=-2+4-2=0 \text{ donc } A\in\mathscr{P}_2 \\ 1+3+1-5=5-5=0 \text{ donc } B\in\mathscr{P}_1 \\ 7\times 1-2\times 3+1-2=7-6+1-2=0 \text{ donc } B\in\mathscr{P}_2 \end{cases}$$

  donc A et B appartiennent à la droite intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
  donc (AB) est bien cette droite.

  Méthode 2 : on teste directement t, $2t+1$ et $-3t+4$ dans chaque équation de plan

  - Pour tout $t\in\mathbb{R}$:
    $t+(2t+1)+(-3t+4)-5 = t+2t+1-3t+4-5$
    $= 0$
    donc tous les points de la droite appartiennent à $\mathscr{P}_1$.

  - Pour tout $t\in\mathbb{R}$:
    $7t-2(2t+1)+(-3t+4)-2 = 7t-4t-2-3t+4-2$
    $= 0$
    donc tous les points de la droite appartiennent à $\mathscr{P}_2$.

  - Donc, la droite est bien l'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

3.
- L'affirmation 1 est vraie.
  Voir l'exercice ① **4. b.** .

- L'affirmation 2 est vraie.
  Voir l'exercice ① **8. c.** pour démontrer qu'ils sont sécants.
  Pour vérifier que le point d'intersection est bien le milieu de $[BC]$:
  - dites qu'il est sur le plan (ABC) puisque sur (BC),
  - montrez qu'il est aussi sur (EF) en vérifiant l'alignement avec les vecteurs colinéaires.

4.
- L'affirmation 1 est vraie.
  On montre que les deux vecteurs directeurs donnés par les représentations paramétriques sont orthogonaux (voir Fiche E4).

- L'affirmation 2 est vraie.
  Voir l'exercice ① **4. a.** pour montrer qu'ils déterminent un plan.
  Voir l'exercice ① **2.** pour montrer que c'est la bonne équation (pas question de chercher une équation cartésienne de (ABC), vous n'avez pas de vecteur normal !).

- L'affirmation 3 est fausse.
  Voir l'exercice ① **2.** .

  $2(1+s-2s')-3(1-2s+s')+2(1-4s+2s')-7 = 2+2s-4s'-3+6s-3s'+2-8s+4s'-7$
  $= -3s'-6$

  Or, $-3s'-6$ n'est pas nul pour toutes les valeurs de s'.
  Donc il existe des points qui n'appartiennent pas au plan.

- L'affirmation 4 est fausse.
  Voir l'exercice ① **8. b.** pour démontrer qu'ils sont sécants.
  Pour qu'il existe un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ qui contient la droite Δ,
  il faut que la droite Δ soit parallèle au plan $\mathscr{P}$.
  Or, …

---

④ **1.** $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}6-1\\4-0\\2-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ} = 2\times(-1)+2\times1+(-9)\times0$
$= -2+2+0=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IG} = 2\times5+2\times4+(-9)\times2$
$= 10+8-18=0$

donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IG}$ non colinéaires
donc $\vec{n}$ est normal au plan (IJG).

2. $\vec{n}$ vecteur normal à (IJG)
donc (IJG) a une équation cartésienne de la forme $2x+2y-9z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

$I\in(IJG)$ donc $2\times1+2\times0-9\times0+d=0$
$\Leftrightarrow d=-2$.

Donc $(IJG) : 2x+2y-9z-2=0$.

3. $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}6-6\\0-0\\2-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

(BF) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ et passe par $B(6;0;0)$

donc (BF) a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=6\\y=0\\z=2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

4. $L(x;y;z)\in(IJG)\cap(BF) \Leftrightarrow 2x+2y-9z-2=0$ et $\begin{cases}x=6\\y=0\\z=2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

On en déduit :

$2\times6+2\times0-9\times2t-2=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$

On a alors $\begin{cases}x=6\\y=0\\z=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\end{cases}$

Donc $L\left(6;0;\frac{4}{3}\right)$.

---

⑤ **1.**
- Les arêtes latérales de la pyramide $ABCDE$ sont isométriques et la base est carrée
  donc $ABCDE$ est une pyramide régulière
  donc sa hauteur passe par le centre I de la base
  donc (EI) est orthogonale au plan $(ABCD)$
  donc AEI est rectangle en I.

  AC est la diagonale d'un carré de côté 1

  donc $AC=\sqrt{2}$ et donc $IA=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

  D'après le théorème de Pythagore : $AE^2=IE^2+IA^2$

  et donc $IE=\sqrt{AE^2-IA^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- On en déduit : $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. $\begin{cases} -2\times0+\sqrt{2}\times0=0+0=0 \\ -2\times0+\sqrt{2}\times0=0 \\ -2\times\frac{1}{2}+\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-1+1=0 \end{cases}$

donc les coordonnées de A, B et E vérifient l'équation $-2y+\sqrt{2}\,z=0$
donc $-2y+\sqrt{2}\,z=0$ est bien une équation cartésienne du plan (ABE).

3. D'après son équation cartésienne, (ABE) a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-0\\1-1\\0-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1/2-0\\1/2-1\\-\sqrt{2}/2-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$

$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{DC} = 0\times1+(-2)\times0+\sqrt{2}\times0$
$= 0+0+0=0$

$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{DF} = 0\times\frac{1}{2}+(-2)\times(-\frac{1}{2})+\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})$
$= 0+1-1=0$

donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DF}$ non colinéaires
donc (FDC) et (ABE) sont parallèles.

---

⑥ **1.** $A(0;0;0)$ car A origine du repère.
$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$ donc $G(1;1;1)$.
I milieu de $[BF]$ donc $I\left(\frac{1+1}{2};\frac{0+0}{2};\frac{0+1}{2}\right)$ donc $I\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$.

De même, J milieu de $[BC]$ donc $J\left(1;\frac{1}{2};0\right)$

et K milieu de $[CD]$ donc $K\left(\frac{1}{2};1;0\right)$.

2. **a.** $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\1-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-1\\1/2-0\\0-1/2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1/2-1\\1-0\\0-1/2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{IJ} = 1\times0+1\times\frac{1}{2}+1\times(-\frac{1}{2})$
$= 0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

$\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{IK} = 1\times(-\frac{1}{2})+1\times1+1\times(-\frac{1}{2})$
$= -\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=0$

donc $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ non colinéaires
donc $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

b. $\overrightarrow{AG}$ vecteur normal à (IJK)
donc (IJK) a une équation cartésienne de la forme $x+y+z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

$I\in(IJK)$ donc $1+0+\frac{1}{2}+d=0$
$\Leftrightarrow d=-\frac{3}{2}$.

Donc $(IJK) : x+y+z-\frac{3}{2}=0$.

3. **a.** Posons $(x;y;z)$ les coordonnées de M.

On a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t\times1=t \\ y=t\times1=t \\ z=t\times1=t \end{cases}$

On en déduit : $\overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}1-t\\0-t\\1/2-t\end{pmatrix}$

et donc $MI^2 = (1-t)^2 + (-t)^2 + (\frac{1}{2}-t)^2$

$= 1 - 2t + t^2 + t^2 + \frac{1}{4} - t + t^2$

$= 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.

b. La fonction polynôme $t \mapsto 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$ a un coefficient dominant 3 positif

donc elle est décroissante puis croissante
et donc elle admet un minimum.
Ce minimum est atteint en $t = \frac{-(-3)}{2\times3} = \frac{1}{2}$. → Rappelez-vous $\frac{-b}{2a}$.

MI est donc minimale pour le point $N(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

4. **a.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$

donc les coordonnées de N vérifient l'équation cartésienne de (IJK)
donc $N \in (IJK)$.

b.
- I et N sont dans le plan (IJK) et $\overrightarrow{AG}$ est normal à (IJK)
donc $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux. → On peut le faire aussi en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{AG}$.
Attention à ne pas répondre trop vite à la perpendicularité !
Or, d'après la question **3. b.**, N appartient à (AG)
donc (IN) et (AG) sont sécantes et orthogonales
donc (IN) et (AG) sont perpendiculaires.

- $\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}1/2-1\\1/2-0\\1/2-1/2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}1-1\\0-0\\1-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{BF} = (-\frac{1}{2})\times0 + \frac{1}{2}\times0 + 0\times1$

$= 0 + 0 + 0 = 0$

donc $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont orthogonaux.

Or, I appartient à (BF)
donc (IN) et (BF) sont sécantes et orthogonales
donc (IN) et (BF) sont perpendiculaires.

---

⑦ **1.** (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ et passe par $A(0;1;-1)$

donc (AB) a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=-2s\\y=s+1\\z=-1\end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$. → Attention, le paramètre t est déjà utilisé dans l'énoncé.

2. **a.** D'après sa représentation paramétrique, $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Or, $\frac{1}{1}=1$ et $\frac{0}{-1}=0$

donc les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires
donc les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.

b. $M(x;y;z) \in \mathscr{D}\cap(AB) \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2+t\\y=1+t\\z=-1-t\end{cases}$ et $\begin{cases}x=-2s\\y=s+1\\z=-1\end{cases}$ avec t et s réels

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2+t=-2s\\1+t=s+1\\-1-t=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2+t=-2s\\1+0=s+1\\t=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2+t=-2s\\s=0\\t=0\end{cases}$

Testons la première équation : $\begin{cases}-2+0=-2\\0+1=1\end{cases}$: elle n'est pas vérifiée.

Donc le système n'est pas vérifié et donc $\mathscr{D}$ et (AB) n'ont pas de point d'intersection : elles ne sont pas sécantes.

3.

- D'après son équation cartésienne, $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

  Donc, le vecteur normal $\vec{n}$ de $\mathscr{P}$ est le vecteur directeur $\vec{v}$ de $\mathscr{D}$
  donc, $\mathscr{P}$ est orthogonal à $\mathscr{D}$.

- $(-2+u)+(1+u)-(-1-u)-3u=-2+1+1+u+u+u-3u=0$
  donc les coordonnées de M vérifient l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$
  donc $M \in \mathscr{P}$.

4.

- $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 1\times(-2)+1\times1+(-1)\times0$
  $= -2+1 = -1 \neq 0$

  donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux
  donc $\mathscr{P}$ et (AB) sont sécants en un point N.

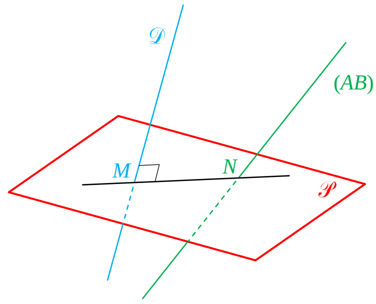
- $N(x\,;y\,;z) \in \mathscr{P} \cap (AB) \Leftrightarrow x+y-z-3u=0$ et $\begin{cases} x=-2s \\ y=s+1 \\ z=-1 \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$

  On en déduit :
  $(-2s)+(s+1)-(-1)-3u=0$
  $\Leftrightarrow s = 2-3u$

  On a alors $\begin{cases} x=-2(2-3u)=-4+6u \\ y=2-3u+1=3-3u \\ z=-1 \end{cases}$

  Donc $N(-4+6u\,;3-3u\,;-1)$.

5. **a.** *N'hésitez pas à faire un schéma pour y voir plus clair :*



$\mathscr{D}$ est orthogonale à $\mathscr{P}$
donc, $\mathscr{D}$ est orthogonale à toutes les droites de $\mathscr{P}$
donc, $\mathscr{D}$ est orthogonale à (MN) car M et N sont des points de $\mathscr{P}$
De plus, $\mathscr{D}$ et (MN) se croisent en M
donc $\mathscr{D}$ et (MN) sont perpendiculaires.

b. *Je prévois que j'aurai besoin des coordonnées de $\overrightarrow{MN}$:*

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}(-4+6u)-(-2+u)\\(3-3u)-(1+u)\\-1-(-1-u)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}5u-2\\-4u+2\\u\end{pmatrix}$

Mise en équation : → *Je suis prudent car je ne sais pas à l'avance si u va exister...*

(MN) perpendiculaire à (AB)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ orthogonaux (puisque (MN) et (AB) se croisent en N)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0$
$\Leftrightarrow (5u-2)\times(-2)+(-4u+2)\times1+u\times0 = 0$ → *Voilà justement une équation d'inconnue u.*
$\Leftrightarrow -10u+4-4u+2 = 0$
$\Leftrightarrow u = \dfrac{6}{14}$

On en déduit que (MN) est perpendiculaire à (AB) pour $u=\dfrac{3}{7}$.

> *Ne soyez pas choqués que (MN) puisse être perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et à (AB) sans que et (AB) soient parallèles...*
> *C'est possible dans l'espace...*

6. **a.**

$MN^2 = (5u-2)^2+(-4u+2)^2+u^2$
$= 25u^2-20u+4+16u^2-16u+4+u^2$
$= 42u^2-36u+8$

b. La fonction polynôme $u \mapsto 42u^2-36u+8$ a un coefficient dominant 41 positif
donc elle est décroissante puis croissante
et donc elle admet un minimum.
Ce minimum est atteint en $u=\dfrac{-(-36)}{2\times42}=\dfrac{3}{7}$.
MN est donc minimale lorsque $u=\dfrac{3}{7}$, c'est-à-dire lorsque (MN) est perpendiculaire à (AB).

---

8 **a.** $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\-2\\-11\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$

$\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{-1}{-2}$ → *Je vérifie que les abscisses et les ordonnées ne sont pas proportionnelles.*
Inutile de vérifier les cotes.

donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas colinéaires
donc E, F et G non alignés définissent un plan.

b. Posons $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (EFG) .

On a $\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{EF} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{EG} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b - 11c = 0 \\ 2a - b - 5c = 0 \end{cases}$ → Je vois b facile à isoler dans la 2ème équation.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2\,(\,2a - 5c\,) - 11c = 0 \\ b = 2a - 5c \end{cases}$ → Dans la 2ème équation, j'exprime b en fonction de a et de c et je le remplace dans la 1ère équation.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a - c = 0 \\ b = 2a - 5c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = 2\times(-c) - 5c \end{cases}$ → J'obtiens a en fonction de c dans la 1ère équation et je le remplace dans la 2ème équation.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -7c \end{cases}$

donc les vecteurs normaux à (EFG) sont de la forme $\begin{pmatrix} -c \\ -7c \\ c \end{pmatrix}$.

Avec $c = 1$, on obtient le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$. → On pouvait prendre $c = -1$ pour avoir moins de négatifs. Ça donnait un autre vecteur normal, colinéaire à celui-ci.

c. $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur normal à $\mathscr{P}$

donc (EFG) a une équation cartésienne de la forme $-x - 7y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

$E \in (EFG)$ donc $-(-1) - 7\times2 + 6 + d = 0$
donc $d = 7$.

Donc $(EFG) : -x - 7y + z + 7 = 0$.

---

9 **a.**

- $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $-x + 2y - 2z - 1 = 0$

  donc un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- $\mathscr{P}'$ a pour équation cartésienne $x - 3y + z + 2 = 0$

  donc un vecteur normal à $\mathscr{P}'$ est $\vec{n}'\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

→ Je vérifie que les abscisses et les ordonnées ne sont pas proportionnelles. Inutile de vérifier les cotes.

- $\frac{-1}{1} \neq \frac{-3}{2}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires
  donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles
  donc ils sont sécants.

b. $M\,(\,x\,;y\,;z\,) \in \mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z - 1 = 0 \\ x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ → Je vois x facile à isoler dans la 1ère équation.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2z - 1 \\ 2y - 2z - 1 - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ → Dans la 1ère équation, j'exprime x en fonction de y et de z et je le remplace dans la 2ème équation.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\,(-z + 1) - 2z - 1 \\ y = -z + 1 \end{cases}$ → J'obtiens y en fonction de z dans la 2ème équation et je le remplace dans la 1ère équation.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4z + 1 \\ y = -z + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4z + 1 \\ y = -z + 1 \\ z = z \end{cases}$ → J'ajoute l'équation toujours vraie $z = z$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ → Je change les z en t .

Donc une représentation paramétrique de la droite intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}'$ est $\begin{cases} x = -4t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Remarquons ce qu'il se serait passé en isolant autre chose que le x de la 1ère équation.
Par exemple, on voit que x est aussi facile à isoler dans la 2ème équation :

$M\,(\,x\,;y\,;z\,) \in \mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z - 1 = 0 \\ x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -(3y - z - 2) + 2y - 2z - 1 = 0 \\ x = 3y - z - 2 \end{cases}$ → Dans la 1ère équation, j'exprime x en fonction de y et de z et je le remplace dans la 2ème équation.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y-z+1=0 \\ x=3y-z-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-z+1 \\ x=3(-z+1)-z-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-z+1 \\ x=-4z+1 \end{cases}$$ → Inutile d'aller plus loin, on voit qu'on obtiendra la même chose ! Ouf...

Mais... il y a aussi le z de la $2^{\text{ème}}$ équation qu'on aurait pu utiliser...

$$M(x;y;z) \in \mathscr{P} \cap \mathscr{P}' \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-2z-1=0 \\ x-3y+z+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-2(-x+3y-2)-1=0 \\ z=-x+3y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4y+3=0 \\ z=-x+3y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y-3 \\ z=-(4y-3)+3y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y-3 \\ z=-y+1 \end{cases}$$ → Là, ce n'est pas du tout la même chose...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y-3 \\ y=y \\ z=-y+1 \end{cases}$$ → Puisqu'on a exprimé en fonction de y, ajoutons l'équation $y=y$!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4t-3 \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Mais alors, quelle est la bonne droite intersection ?
Et bien, soyez rassurés, c'est la même droite avec les deux méthodes.

On remarque d'abord que $\begin{cases} x=-4t+1 \\ y=-t+1 \\ z=t \end{cases}$ et $\begin{cases} x=4t-3 \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases}$ donnent des vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ colinéaires.

Puis $\begin{cases} x=-4t+1 \\ y=-t+1 \\ z=t \end{cases}$ donne le point $A(1;1;0)$ et $\begin{cases} x=4t-3 \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases}$ donne le point $B(-3;0;1)$.

Or, $A(1;1;0)$ vérifie $\begin{cases} x=4t-3 \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases}$ (les 3 équations donnent $t=1$)

et $B(-3;0;1)$ vérifie $\begin{cases} x=-4t+1 \\ y=-t+1 \\ z=t \end{cases}$ (les 3 équations donnent $t=1$ également) !

Nous avons donc bien trouvé deux représentations paramétriques différentes de la même droite.