Savoir UTILISER LE PRODUIT SCALAIRE

Ce que je dois savoir faire

- **Calculer le produit scalaire de deux vecteurs**

  - *Les 3 cas particuliers* : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

    Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires, alors $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

    Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0}$.

    Remarque : Si les vecteurs s'exprime par deux points, inutile de s'embarrasser avec les normes.
    $\|\overrightarrow{AB}\|$ s'écrit simplement AB .

  - *Méthode artisanale* : Il est souvent intéressant de décomposer un produit scalaire en quatre autres en utilisant la relation de Chasles puis la distributivité, notamment quand on travaille dans un cube.

    Ainsi : $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})\,.\,(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{ND}) \\ &= \overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{ND}\end{aligned}$$

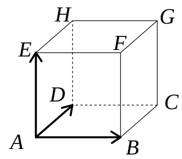
    Avec M et N bien choisis, on obtient quatre produits scalaires particuliers avec des vecteurs orthogonaux ou colinéaires.

  - *Forme " coordonnées "* : Dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$, alors $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'}$.

    À utiliser dès qu'on dispose d'un repère orthonormé :

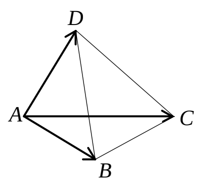
    - soit directement donné par l'énoncé, du type $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$,

    - soit qu'on définit soi-même avec les sommets d'un cube d'arête 1, par exemple $(A\,,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\,)$.



    ⚠ Si le cube est d'arête $a \neq 1$, $(A\,,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\,)$ sera orthogonal mais pas normé...

    Il faut alors utiliser $\left(A\,,\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD},\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$.



    ⚠ Dans un tétraèdre, on ne pourra pas définir de repère orthonormé avec les sommets.

  - *Forme " cosinus "* : $\boxed{\begin{array}{l}\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,,\vec{v}\,) \\ \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}\end{array}}$

    À utiliser si on a un angle usuel, ou si, au contraire, on cherche un angle (voir plus bas).

  - *Forme " projeté "* : $\boxed{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}}$, où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .

    Très pratique quand on a des angles droits, en particulier dans le cube.

  - *Forme " normes "* : $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)}$

    Rare dans les sujets de bac, à utiliser seulement si on connaît les normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et surtout de $\vec{u}+\vec{v}$.

- **Calculer un angle en utilisant deux expressions d'un même produit scalaire**

  On pose $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$, avec AB et AC connus.
  Si on arrive à calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ avec une autre forme, on obtiendra $\cos\widehat{BAC}$ et donc $\widehat{BAC}$ (sans triangle rectangle).

- **Démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux**
  et donc **démontrer que deux droites sont orthogonales** (ou **perpendiculaires**)

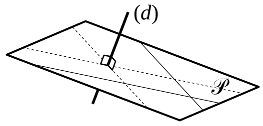
  - *Pour les vecteurs* : Si $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

  - *... qui sert pour* : Si deux droites ont des vecteurs directeurs orthogonaux, alors elles sont orthogonales.

    - Si en plus elles sont sécantes, alors elles sont perpendiculaires.
      Vieilles méthodes : Ne pas oublier tout ce qu'on connaît pour démontrer des perpendiculaires (les hauteurs, les rectangles, les faces carrées d'un cube, les diagonales de losanges, la médiatrice, le théorème de Pythagore, ...).

  - *Une méthode assez rare mais à laquelle il faut penser* si vous avez démontré que (d) est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$, alors (d) est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$.

- **Démontrer qu'une droite (d) est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$**



  - Si (d) est orthogonale à <u>deux</u> droites sécantes de $\mathscr{P}$, alors (d) est orthogonale à $\mathscr{P}$.

    <u>*Méthode*</u> : On montrera qu'un vecteur directeur de (d) est orthogonal à <u>deux</u> vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.

  - Il arrive souvent que la droite et le plan orthogonaux soient la hauteur et la base d'une pyramide.

    Il faut alors savoir **calculer le volume d'une pyramide** avec la formule $\dfrac{hauteur \times aire\ de\ la\ base\ associée}{3}$.

    Et pensez à justifier la hauteur.

- **Démontrer que deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires**

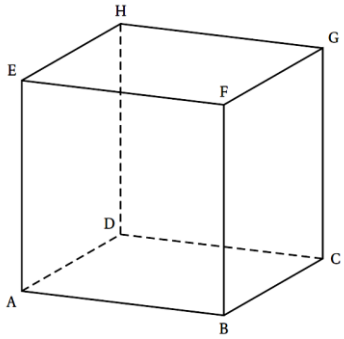
  Si $\mathscr{P}'$ contient une droite orthogonale à $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.

<u>*Remarques sur les exercices*</u>

- Quatorze petits exercices de type bac, très variés mais avec des classiques qui reviennent souvent.
  Tous se font avec le produit scalaire, certains peuvent se faire avec d'autres méthodes.

---

① $ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.



L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DC}\,,\overrightarrow{DA}\,,\overrightarrow{DH})$.
Dans ce repère, on a :
$D(0\,;0\,;0)$, $C(1\,;0\,;0)$, $A(0\,;1\,;0)$ et $H(0\,;0\,;1)$.

1. Déterminer les coordonnées de B, E, G et F en justifiant à chaque fois par une égalité vectorielle.

2. Montrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (BGE).

D'après Baccalauréat Antilles 2016

---

② *Une seule des quatre affirmations proposées est exacte.*
Le candidat indiquera sur sa copie la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée.

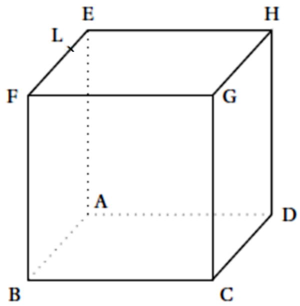
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1\,;-1\,;-1)$, $B(1\,;1\,;1)$ et $C(0\,;3\,;1)$.
Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a. 22,2° **b.** 0,4° **c.** 67,8° **d.** 1,2°

D'après Baccalauréat Asie 2014

---

③ *Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.*



$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{EL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.

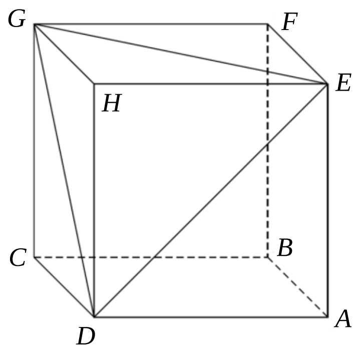
Proposition : Le triangle DBL est rectangle en B.

D'après Baccalauréat Polynésie 2016

④ On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.

On se place dans le repère orthonormé $(B\,;\,\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{BC}\,,\,\overrightarrow{BF})$.

Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire* au plan (DEG).



* *Le mot exact est* orthogonale .

D'après Baccalauréat Antilles Septembre 2016

---

⑤ On considère un cube $ABCDEFCH$ donné ci-contre.

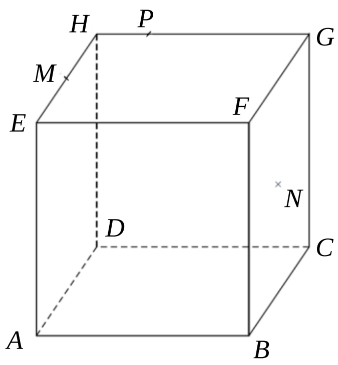
On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \dfrac{1}{4}\,\overrightarrow{HG}$.

L'espace est rapporté au repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.

2. Soit le point T de coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\dfrac{5}{8}\right)$.

Le triangle TPN est-il rectangle en T ?



D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2014

---

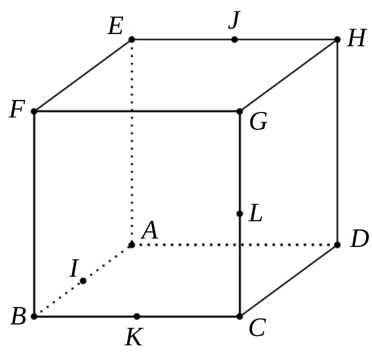
⑥ $ABCDEFGH$ est un cube.
I est le milieu du segment $[AB]$, J est le milieu du segment $[EH]$,
K est le milieu du segment $[BC]$ et L est le milieu du segment $[CG]$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE})$.

1. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

2. Montrer que le triangle IJK est rectangle en I et calculer son aire.

3. On pose M le milieu de $[JK]$.
Montrer que M est sur la droite (FD).
En déduire le volume du tétraèdre $FIJK$.



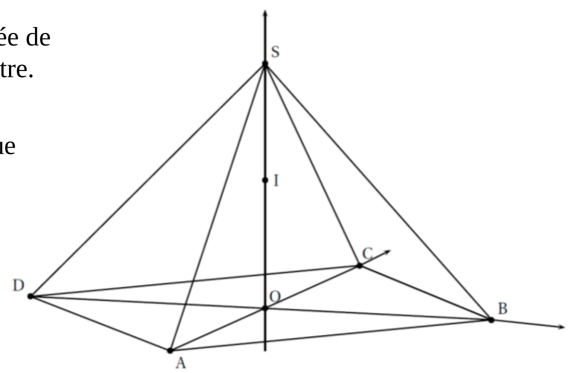
D'après Baccalauréat Liban 2015

---

⑦ On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-contre.
Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.

On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

Justifier que le repère $(O\,;\,\overrightarrow{OB}\,,\,\overrightarrow{OC}\,,\,\overrightarrow{OS})$ est orthonormé.



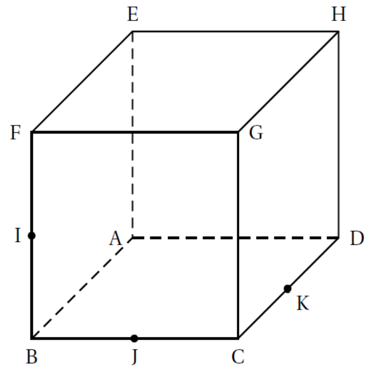
D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2016

⑧ $ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.
Le point K est le milieu du segment $[CD]$.

L'espace est rapporté au repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (IJK).



D'après Baccalauréat Pondichéry 2016

---

⑨ *Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.*

On considère les points $E(2\,;1\,;-3)$, $F(1\,;-1\,;2)$ et $G(-1\,;3\,;1)$ dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé de l'espace.

Affirmation : une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{FEG}$, arrondie au degré, est 50°.

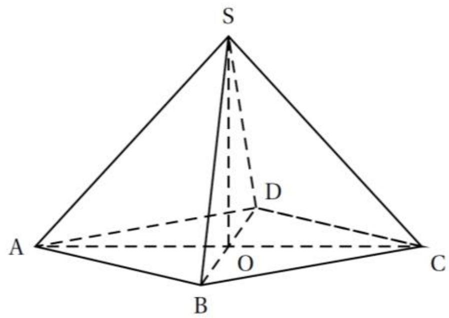
D'après Baccalauréat Centres Étrangers 2015

---

⑩ On considère une pyramide équilatère $SABCD$ (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.
Les diagonales du carré $ABCD$ mesurent 24 cm.
On note O le centre du carré $ABCD$.
On admettra que $OS = OA$.

1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

2. En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide $SABCD$.



D'après Baccalauréat Amérique du Sud 2016

---

⑪ Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le tétraèdre $ABCD$ dont les sommets ont pour coordonnées $A(1\,;-\sqrt{3}\,;0)$, $B(1\,;\sqrt{3}\,;0)$, $C(-2\,;0\,;0)$ et $D(0\,;0\,;2\sqrt{2})$.
On note L le milieu du segment $[AC]$.

1. Démontrer que la droite (BL) passe par le point O.

2. Démontrer que la droite (BL) est orthogonale à la droite (AC).

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2014

---

⑫ Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A(5\,;-5\,;2)$, $B(-1\,;1\,;0)$, $C(0\,;1\,;2)$ et $D(6\,;6\,;-1)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de AB et AC.

2. Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

D'après Baccalauréat Polynésie 2014

---

⑬ *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Une seule des quatre propositions est correcte.*

Soit A et B deux points distincts du plan.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est :

a. l'ensemble vide.

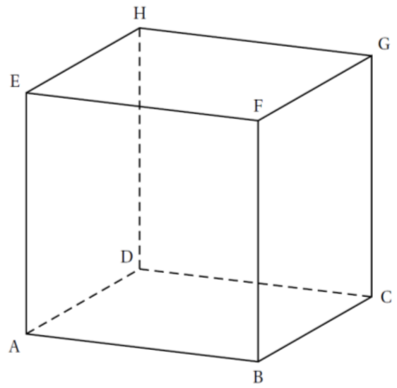
b. la médiatrice du segment $[AB]$.

c. le cercle de diamètre $[AB]$.

d. la droite (AB).

D'après Baccalauréat Amérique du Sud 2014

⑭ Soit un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère les points :
$M\left(1\,;1\,;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$, $P\left(1\,;0\,;-\frac{5}{4}\right)$.



1. Placer M, N et P sur la figure donnée ci-contre.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. On considère la fonction en *Python* suivante :

```
def f(xM,yM,zM,xN,yN,zN,xP,yP,zP) :
    d = xN−xM
    e = yN−yM
    f = zN−zM
    g = xP−xM
    h = yP−yM
    i = zP−zM
    return(d*g+e*h+f*i)
```

a. Que retourne cette fonction avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus ?

b. À quoi correspond la valeur retournée par cette fonction ?
Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

D'après Baccalauréat Pondichéry 2015