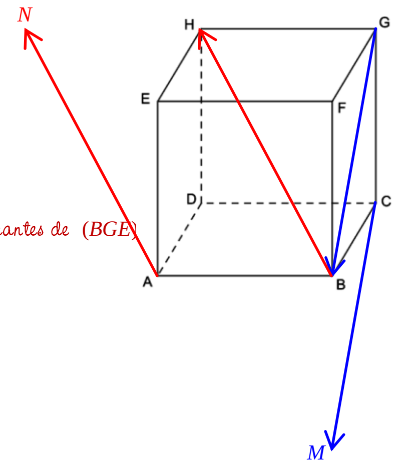
Correction de **GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE - Fiche 3**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭

① **1.** Attention à l'ordre imposé des vecteurs de base.



$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$ donc $B(1;1;0)$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH}$ donc $E(0;1;1)$

$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$ donc $G(1;0;1)$

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$ donc $F(1;1;1)$

2. Pour que (DF) soit orthogonale au plan (BGE), il faut que (DF) soit orthogonale à deux droites sécantes de (BGE).
(BGE) contient trois droites naturelles (BG), (BE) et (GE), toutes sécantes.
On en choisit deux pour démontrer qu'elles sont orthogonales à (DF).

Et bien sûr, ce sont les vecteurs directeurs qui vont faire le travail !

$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\1-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\1-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Or : $\begin{cases}\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG} = 1\times0 + 1\times(-1) + 1\times1 = -1+1 = 0\\ \overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE} = 1\times(-1) + 1\times0 + 1\times1 = -1+1 = 0\end{cases}$

donc $\overrightarrow{DF}$ orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BE}$ non colinéaires
donc (DF) orthogonale à deux droites sécantes (BG) et (BE) du plan (BGE) → Attention à ne pas oublier « sécantes ».
donc (DF) orthogonale à (BGE).

② C'est l'exercice classique qui utilise deux formes différentes du même produit scalaire.
Une des formes est nécessairement la forme " cosinus ".
Comme on veut l'angle $\widehat{BAC}$, il faut utiliser le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- $1^{ère}$ forme : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

  Il faut calculer AB et AC :

  $AB = \sqrt{(1-1)^2 + (1-(-1))^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{8}$

  De même, on trouve $AC = \sqrt{21}$.

  Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \sqrt{8} \times \sqrt{21} \times \cos\widehat{BAC}$.

- $2^{ème}$ forme : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$

  donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0\times(-1) + 2\times4 + 2\times2 = 12$.

- On en déduit $\sqrt{8} \times \sqrt{21} \times \cos\widehat{BAC} = 12$

  puis $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{12}{\sqrt{8}\times\sqrt{21}}$

  puis $\widehat{BAC} \approx 22{,}2°$

  Attention à remettre sa calculatrice en mode degrés !

Réponse **a.**

③ Il faut calculer le produit scalaire $\vec{BL} . \vec{BD}$.

On pourrait choisir un repère, calculer les coordonnées de B , L et D puis les coordonnées de $\vec{BL}$ et $\vec{BD}$.

Mais on peut aussi utiliser la relation de Chasles et les multiples angles droits du cube :

$$\begin{aligned} \vec{BL} . \vec{BD} &= (\vec{BF} + \vec{FL}) . (\vec{BC} + \vec{CD}) \\ &= \vec{BF} . \vec{BC} + \vec{BF} . \vec{CD} + \vec{FL} . \vec{BC} + \vec{FL} . \vec{CD} \\ &= 0 + 0 + 0 + \frac{2}{3} \times 1 \\ &= \frac{2}{3} \neq 0 \end{aligned}$$

donc $\vec{BL}$ et $\vec{BD}$ ne sont pas orthogonaux

donc DBL n'est pas rectangle en B .

---

④ Même exercice que le ① .

---

⑤ Même exercice que le ③ .

Mais comme on vous demande de calculer les coordonnées des points utiles, il n'y a pas plus rapide pour calculer le produit scalaire que la formule " coordonnées ".

On trouve $\vec{TP} . \vec{TN} = -\frac{3}{64} \neq 0$, donc TPN n'est pas rectangle en T .

---

⑥ **1.** Comme dans l'exercice ① . C'est une question décidément classique...

2. Pour démontrer que IJK est rectangle en I , c'est comme dans l'exercice ③ avec la formule " coordonnées ".

Pour l'aire, c'est élémentaire, on trouve $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3.
- M milieu de $[JK]$

  donc $M\left(\frac{0+1}{2} ; \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} ; \frac{1+0}{2}\right)$ et donc $M\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

  $$\begin{cases} \vec{FM}\begin{pmatrix} 1/2-1 \\ 1/2-0 \\ 1/2-1 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{FM}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\ \vec{FD}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \text{Déjà calculé} \end{cases}$$

  donc $\vec{FM} = \frac{1}{2} \vec{FD}$

  donc $\vec{FM}$ et $\vec{FD}$ sont colinéaires

  donc M est sur la droite (FD) .
- (FM) est donc orthogonale au plan (IJK) et M est dans le plan (IJK) → Je justifie la hauteur.

  donc $[FM]$ est la hauteur associée à la base IJK .

  Donc, le volume de $FIJK$ vaut $\frac{FM \times \text{aire de } IJK}{3} = \frac{\sqrt{(-1/2)^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2} \times \frac{\sqrt{3}}{4}}{3} = \frac{1}{8}$.

---

⑦ La question est originale... Il faut se rappeler ce qu'est un repère orthonormé.

- D'une part, les demi-diagonales du carré sont de même longueur, donc $OC = OB = 1$.

  Le calcul de OS est moins immédiat !

  Les diagonales de la base carrée sont perpendiculaires,

  donc, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OBC rectangle en O : $BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

  SBC équilatéral donc $BS = BC = \sqrt{2}$.

  $[SO]$ est la hauteur de la pyramide,

  donc (SO) est orthogonale à toutes les droites de $(ABCD)$

  donc $(SO) \perp (OB)$

  donc, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OBS rectangle en O : $OS = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 1$.

  On en déduit que $(O ; \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{OS})$ est un repère normé.
- On a vu que $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$ sont orthogonaux.

  On a vu aussi que $\vec{OB}$ et $\vec{OS}$ sont orthogonaux.

  (SO) orthogonale à toutes les droites de $(ABCD)$

  donc $(SO) \perp (OC)$

  donc $\vec{OC}$ et $\vec{OS}$ sont orthogonaux.

  On en déduit que $(O ; \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{OS})$ est un repère orthonormé.

⑧ Même exercice que le ① .

---

⑨ Même exercice que le ② .

On trouve $\cos \widehat{FEG} = \dfrac{19}{\sqrt{870}}$ et donc $\widehat{FEG} = 49{,}89\ldots°$.

C'est donc vrai.

---

⑩ **1.** Ça va nous rappeler le collège !

Les faces latérales sont des triangles équilatéraux,
donc $SA = SB = SC$
donc S est sur la médiatrice de $[AC]$
donc $(SO) \perp (AC)$.

De même, S est sur la médiatrice de $[BD]$
donc $(SO) \perp (BD)$.

On en déduit que (SO) est perpendiculaires à deux sécantes de (ABC)
donc (SO) orthogonale à (ABC) .

2. Calculez SO et l'aire de $ABCD$ et vous trouverez que le volume de la pyramide vaut $1\,152$ cm^3.

---

⑪ **1.** L milieu de $[AC]$

donc $L\left(\dfrac{1+(-2)}{2} ; \dfrac{-\sqrt{3}+0}{2} ; \dfrac{0+0}{2}\right)$ et donc $L\left(-\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; 0\right)$.

$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OL}\begin{pmatrix}-1/2\\ -\sqrt{3}/2\\ 0\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{OB} = -2\,\overrightarrow{OL}$
donc $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OL}$ sont colinéaires
donc B , L et O sont alignés
donc (BL) passe par O .

2. $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-3/2\\ -3\sqrt{3}/2\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{BL}.\overrightarrow{AC} = -\dfrac{3}{2}\times(-3) + \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt{3} + 0\times0$

$= \dfrac{9}{2} - \dfrac{9}{2} = 0$

donc $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux
donc (BL) et (AC) sont orthogonales.

---

⑫ Même exercice que le ② .

On trouve $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{66}{\sqrt{4\,636}}$ et donc $\widehat{BAC} \approx 14{,}2°$.

---

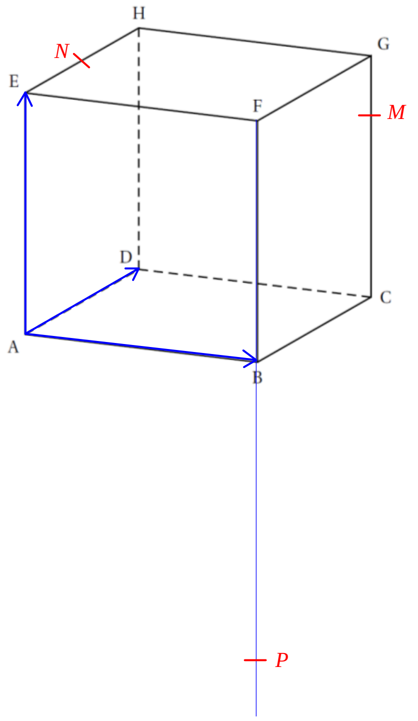
⑬ $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$ signifie que :

- soit $\overrightarrow{MA}$ est le vecteur nul et alors M est le point A ,
- soit $\overrightarrow{MB}$ est le vecteur nul et alors M est le point B ,
- soit $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux et alors ABM est rectangle en M .

On reconnaît la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$.

Réponse **c.**

⑭ **1.**



2. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0-1\\1/2-1\\1-3/4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1/4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\-5/4-3/4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$\begin{cases}\dfrac{0}{-1}=0\\[2mm]\dfrac{-1}{-1/2}=2\end{cases}$ donc les coordonnées ne sont pas proportionnelles

donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires,
donc M , N et P ne sont pas alignés.

3. **a.** $d = x_N - x_M = -1$

$e = y_N - y_M = -\dfrac{1}{2}$

$f = z_N - z_M = \dfrac{1}{4}$

$g = x_P - x_M = 0$
$h = y_P - y_M = -1$
$i = z_P - z_M = -2$

Donc la fonction retourne $-1\times0 + (-\dfrac{1}{2})\times(-1) + \dfrac{1}{4}\times(-2) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$.

b. La valeur retournée est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

Ce produit scalaire étant nul, on en déduit que MNP est rectangle en M .