Savoir ÉTUDIER UNE SUITE AVEC ln

Ce que je dois savoir faire :

- **Maîtriser toutes les méthodes sur les suites.**
- **Maîtriser tous les calculs sur les logarithmes (et donc ceux sur les exponentielles !).**

Remarques sur les exercices :

- L'exercice **1.** est un exercice facile mais théorique pour manipuler les suites arithmétiques du monde additif, les suites géométriques du monde multiplicatif, l'exponentielle qui transforme les sommes en produits et le logarithme népérien qui transforme les produits en sommes…
- L'exercice **2.** commence par une petite étude de fonction.
  Retenez bien que la Partie A d'un problème sert dans la Partie B…
- L'exercice **3.** a des questions semblables au **2.** mais avec quelques difficultés calculatoires.
- L'exercice **4.** est encore de la même forme que le **2.** .

---

1. **1.1.** On donne une suite arithmétique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r .
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mathrm{e}^{a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que (u_n) est géométrique.
Préciser son premier terme et sa raison.

b) Étudier la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ suivant les valeurs de r .

1.2. On donne une suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q .
Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \ln(g_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que (v_n) est arithmétique.
Préciser son premier terme et sa raison.

---

2. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
En déduire que, si $x \in [0 ; 1]$, alors $f(x) \in [0 ; 1]$.

Partie B

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n > 0$, $u_n \in [0 ; 1]$.

b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

c) 1) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

2) On admet que la limite ℓ vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
Déterminer cette limite.

D'après Baccalauréat Nouvelle Calédonie 2011

---

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

a) 1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

2) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

3) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

b) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

1) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

2) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n .

3) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2013

---

4. Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.

b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

c) En déduire que, si $x > \mathrm{e}$, alors $f(x) > \mathrm{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points A_0 , A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 .
On laissera apparents les traits de construction.

Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

b) 1) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > \mathrm{e}$.

2) Déterminer les variations de la suite (u_n) .

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

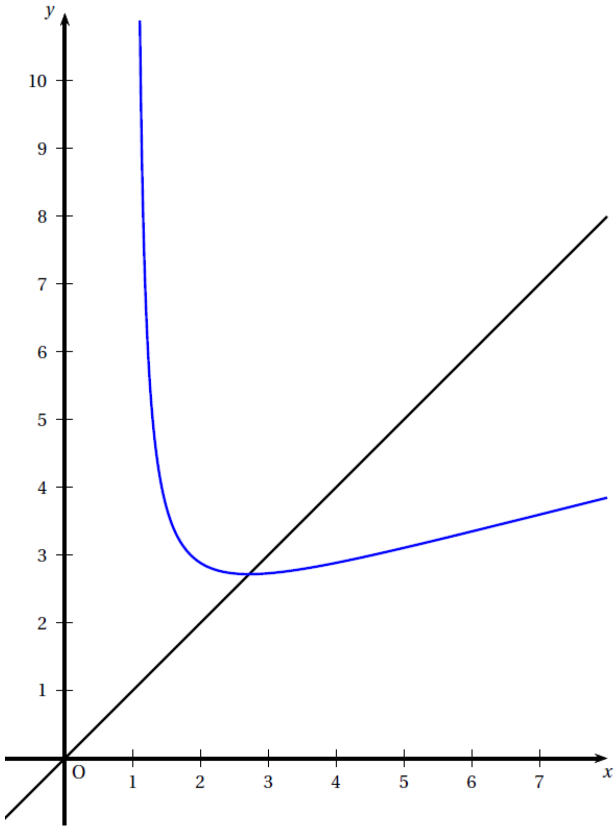
4) On admet que la limite ℓ vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
Déterminer cette limite.

c) On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle
Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
Faire
    Affecter (X/lnX) à X
    Affecter Y +1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3	2,718 372 634 6	2,718 281 830 01	2,718 281 828 5



D'après Baccalauréat Antilles Septembre 2012