Correction de Tale S - FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN - Fiche 2

1. **1.1.** ***a)*** 1ère méthode : en utilisant les formules de récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= e^{a_{n+1}} \\ &= e^{a_n + r} \quad \text{car } (a_n) \text{ arithmétique de raison } r \\ &= e^{a_n}\, e^r \\ &= u_n\, e^r \end{aligned}$$

Donc, (u_n) est géométrique de raison e^r et de premier terme $u_0 = e^{a_0}$.

2ème méthode : en utilisant les formules explicites

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= e^{a_n} \\ &= e^{a_0 + nr} \quad \text{car } (a_n) \text{ arithmétique de raison } r \\ &= e^{a_0}\, e^{nr} \\ &= e^{a_0}\,(e^r)^n \end{aligned}$$

→ On voit que u_n vérifie la forme explicite $u_0\, q^n$ des suites géométriques.

Donc, (u_n) est géométrique de raison e^r et de premier terme e^{a_0} .

b) On sait que les limites possibles d'une suite géométrique sont :

- $+\infty$ si la raison q vérifie $q > 1$ et si le premier terme u_0 est strictement positif (attention au rôle du premier terme !) ,
- $-\infty$ si la raison q vérifie $q > 1$ et si le premier terme u_0 est strictement négatif ,
- 0 si la raison q vérifie $-1 < q < 1$ (quel que soit le signe de u_0 ...).

Il faut aussi envisager deux cas :

- il n'y a pas de limite si la raison q vérifie $q \geqslant -1$,
- la suite est constante si $u_0 = 0$ et alors, la limite est 0 .
- la suite est constante si la raison q vérifie $q = 1$ et alors, la limite est la valeur de u_0 .

- Si $r > 0$, alors $e^r > 1$.
  Or, le premier terme $u_0 = e^{a_0}$ est toujours strictement positif.
  Alors (u_n) a pour limite $+\infty$.
- Si $r < 0$, alors $0 < e^r < 1$.
  Alors (u_n) a pour limite 0 .
- Si $r = 0$, alors $e^r = 1$.
  Alors (u_n) a pour limite $u_0 = e^{a_0}$.

1.2. 1ère méthode : en utilisant les formules de récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(g_{n+1}) \\ &= \ln(g_n \times q) \quad \text{car } (g_n) \text{ géométrique de raison } q \\ &= \ln(g_n) + \ln q \\ &= v_n + \ln q \end{aligned}$$

Donc, (v_n) est arithmétique de raison $\ln q$ et de premier terme $v_0 = \ln(g_0)$.

2ème méthode : en utilisant les formules explicites

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

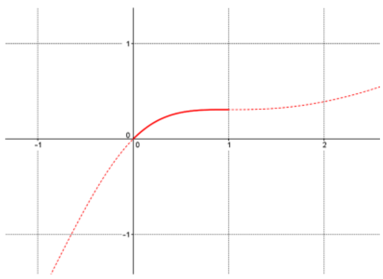
$$\begin{aligned} v_n &= \ln(g_n) \\ &= \ln(g_0 \times q^n) \quad \text{car } (g_n) \text{ géométrique de raison } q \\ &= \ln(g_0) + \ln(q^n) \\ &= \ln(g_0) + n \ln q \end{aligned}$$

→ On voit que v_n vérifie la forme explicite $v_0 + n\,r$ des suites arithmétiques.

Donc, (v_n) est arithmétique de raison $\ln q$ et de premier terme $\ln(g_0)$.

---

2. **Partie A**



Vous commencez bien sûr par tracer la courbe !

- f est de la forme $u - \ln v$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto x \text{ dérivable sur } [\,0\,;1\,] \text{ et } u'(x) = 1 \\ v : x \mapsto x^2 + 1 \text{ dérivable sur } [\,0\,;1\,] \text{ et } v'(x) = 2x\,. \end{cases}$

  Donc, par somme, f est dérivable sur $[\,0\,;1\,]$ et $f' = u' - \dfrac{v'}{v}$.

  Donc $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1}$

  $= \dfrac{x^2 + 1 - 2x}{x^2+1}$ → Je n'oublie pas de factoriser pour l'étude des signes.

  $= \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ → Ceux qui n'auront pas vu l'identité remarquable pourront utiliser le discriminant... mais c'est plus long !

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} = 0$
  $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$
  $\Leftrightarrow x = 1$

Si on n'a pas vu l'identité remarquable :
$\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times1 = 0$
donc x^2+1-2x n'a qu'une racine $\dfrac{-(-2)}{2\times1} = 1$.
Il est du signe de son coefficient dominant 1 positif à l'extérieur de sa racine 1.

- Pour tout $x \in [\,0\,;1\,[$, $\begin{cases}(x-1)^2 > 0\\ x^2+1>0\end{cases}$ et donc $f'(x) > 0$.

-

x	0	1
signes de $h'(x)$	$+$	0
variations de h	0 $\nearrow$	$1-\ln 2$

$f(0) = 0 - \ln(0^2+1) = -\ln 1 = 0$
$f(1) = 1 - \ln(1^2+1) = 1-\ln 2$

- Pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1-\ln 2$.
  Or $1-\ln 2 = 0{,}3\ldots \leqslant 1$.
  Donc, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
  On a bien $f(x) \in [\,0\,;1\,]$.

Partie B

a) Ça sent bien la Partie A !

Posons $\mathscr{P}(n) : u_n \in [\,0\,;1\,]$.

- Initialisation :
  $u_0 = 1 \in [\,0\,;1\,]$
  donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier n quelconque.
  Alors :
  $u_n \in [\,0\,;1\,]$ par hypothèse de récurrence
  donc $f(u_n) \in [\,0\,;1\,]$ d'après la Partie A
  et donc $u_{n+1} \in [\,0\,;1\,]$. $\longrightarrow$ Vous avez bien sûr vu que u_{n+1} est $f(u_n)$.

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

b) On ne vous dit pas si la suite est croissante ou décroissante.
Rien ne vous empêche de calculer quelques termes pour conjecturer : $u_0 = 1$; $u_1 = 1 + \ln(1^2+1) = 1{,}6\ldots$
Cela semble croissant.
La méthode reste toujours la même :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n^2+1) - u_n$$
$$= -\ln(u_n^2+1)$$

Le signe de $\ln x$ dépend de la position de x par rapport à 1 .
Il faut donc étudier la position de u_n^2+1 par rapport à 1 , ce qui est très facile !

$u_n^2 \geqslant 0$
donc $u_n^2 + 1 \geqslant 1$
donc $\ln(u_n^2+1) \geqslant \ln 1$ car la fonction $\ln$ est croissante
donc $\ln(u_n^2+1) \geqslant 0$
donc $-\ln(u_n^2+1) \leqslant 0$.

On en déduit $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$
et donc, (u_n) décroissante.

c) **1)** Un petit théorème tout simple qu'il ne faut surtout pas oublier :

$\begin{cases}\text{D'après la question 1. , } (u_n) \text{ est majorée par 2 ,}\\ \text{d'après la question 2. , } (u_n) \text{ est croissante}\end{cases}$

donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

2) $\ell = f(\ell)$
$\Leftrightarrow \ell = \ell - \ln(\ell^2+1)$
$\Leftrightarrow \ln(\ell^2+1) = 0$
$\Leftrightarrow e^{\ln(\ell^2+1)} = e^0$
$\Leftrightarrow \ell^2+1 = 1$
$\Leftrightarrow \ell^2 = 0$
$\Leftrightarrow \ell = 0$

Donc, la limite est 0.

3. *a)* **1)** *La suite est définie par récurrence, vous devez "sentir" qu'il faut utiliser une **démonstration par récurrence** :*

Posons $\mathscr{P}(n) : u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

- Initialisation :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ 0 < 1 \leqslant 2 \end{cases}$ donc $0 < u_0 \leqslant 2$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier n quelconque.
Alors :
$0 < u_n \leqslant 2$ par hypothèse de récurrence
donc $0 < 2u_n \leqslant 4$
donc $0 < \sqrt{2u_n} \leqslant \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante
donc $0 < u_{n+1} \leqslant 2$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

2) *Comme dans l'exercice précédent, on ne vous dit pas si la suite est croissante ou décroissante.*
$u_0 = 1$; $u_1 = \sqrt{2 \times 1} = 1{,}4...$; $u_2 = \sqrt{2 \times 1{,}4...} = 1{,}6...$
Cela semble croissant...

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n$$
$$= \frac{(\sqrt{2u_n} - u_n)(\sqrt{2u_n} + u_n)}{\sqrt{2u_n} + u_n}$$ → *La multiplication par le conjugué reste le meilleur outil pour gérer une somme avec racine carrée !*
$$= \frac{(\sqrt{2u_n})^2 - u_n^{\,2}}{\sqrt{2u_n} + u_n}$$
$$= \frac{2u_n - u_n^{\,2}}{\sqrt{2u_n} + u_n}$$ → *Le dénominateur est une somme, mais très sympa ! Le numérateur ne l'est pas, il faut factoriser...*
$$= \frac{u_n(2 - u_n)}{\sqrt{2u_n} + u_n}$$

$\begin{cases} u_n > 0 \text{ d'après la question précédente.} \\ u_n \leqslant 2 \text{ d'après la question précédente, et donc } 2 - u_n \geqslant 0 \text{ .} \\ \sqrt{2u_n} > 0 \text{ et } u_n > 0 \text{ et donc, par somme, } \sqrt{2u_n} + u_n > 0 \text{ .} \end{cases}$

On en déduit $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
et donc, (u_n) croissante.

3) *Comme dans l'exercice précédent :*

$\begin{cases} \text{D'après la question 1., } (u_n) \text{ est majorée par 2 ,} \\ \text{d'après la question 2., } (u_n) \text{ est croissante} \end{cases}$

donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

b) **1)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$ → *Je commence en sachant que je dois arriver à* $\frac{1}{2} v_n$ *, c'est-à-dire à* $\frac{1}{2}(\ln u_n - \ln 2)$ *.*

$= \ln \sqrt{2u_n} - \ln 2$ → *Je dois faire apparaître* $\ln u_n$ *.*

$= \frac{1}{2} \ln 2u_n - \ln 2$ → *On utilise ici la formule :* $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ *, que vous pouvez retenir en pensant que* $\sqrt{x}$ *peut s'écrire* $x^{\frac{1}{2}}$ *.*

$= \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln u_n) - \ln 2$ → *Ça y est, j'ai mon* $\ln u_n$ *...*

$= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_n - \ln 2$

$= \frac{1}{2} \ln u_n - \frac{1}{2} \ln 2$

$= \frac{1}{2}(\ln u_n - \ln 2)$

$= \frac{1}{2} v_n$

Donc, (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln u_0 - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$.

2)
- (v_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $-\ln 2$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = \ln u_n - \ln 2$ → *Je dois isoler* u_n *.*

$\Leftrightarrow \ln u_n = v_n + \ln 2$

$\Leftrightarrow e^{\ln u_n} = e^{v_n + \ln 2}$

$\Leftrightarrow u_n = e^{(-\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ln 2}$ → *C'est assez indigeste... mais j'ai exprimé* u_n *en fonction de* n *...*

3) *J'essaie de trouver la limite au brouillon :* $e^{(-\ln 2)(\frac{1}{2})^n + \ln 2}$ 0 0 $\ln 2$ $e^{\ln 2}$
Il n'y aura pas de problème !

$\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

donc, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} (-\ln 2)(\frac{1}{2})^n = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} [(-\ln 2)(\frac{1}{2})^n + \ln 2] = \ln 2$

donc, par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{(-\ln 2)(\frac{1}{2})^n + \ln 2} = e^{\ln 2} = 2$.

---

4. Partie A

→ On étudie la même fonction que dans l'exercice 1.6. de la fiche LN 01 mais définie sur $]1 ; +\infty[$.

a)

- Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ avec $\frac{\ln x}{x}$ positif *→ Ne pas oublier " positif " car sinon, on ne sait pas si c'est* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

  donc, par inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1+} x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1+} \ln x = 0 \text{ avec } \ln x \text{ positif, donc, par inverse, } \lim\limits_{x \to 1+} \frac{1}{\ln x} = +\infty \end{cases}$ *→ Là aussi...*

  donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = +\infty$.

b)

- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto x \text{ dérivable sur }]1 ; +\infty[\text{ et } u'(x) = 1 \\ v : x \mapsto \ln x \text{ dérivable sur }]1 ; +\infty[\text{ et } v'(x) = \frac{1}{x} . \end{cases}$

  Donc, par quotient, f est dérivable sur $]1 ; +\infty[$ et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

  Donc $f'(x) = \frac{1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$
  $= \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

- $G'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$ *→ On cherche quand la dérivée s'annule...*
  $\Leftrightarrow \ln x - 1 = 0$
  $\Leftrightarrow \ln x = 1$
  $\Leftrightarrow x = e$

- $(\ln x)^2 > 0$ pour tout $x \in]1 ; +\infty[$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln x - 1$.

  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0$
  $\Leftrightarrow \ln x > 1$
  $\Leftrightarrow e^{\ln x} > e^1$ car exp croissante
  $\Leftrightarrow x > e$

x	1		e		$+\infty$
signes de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

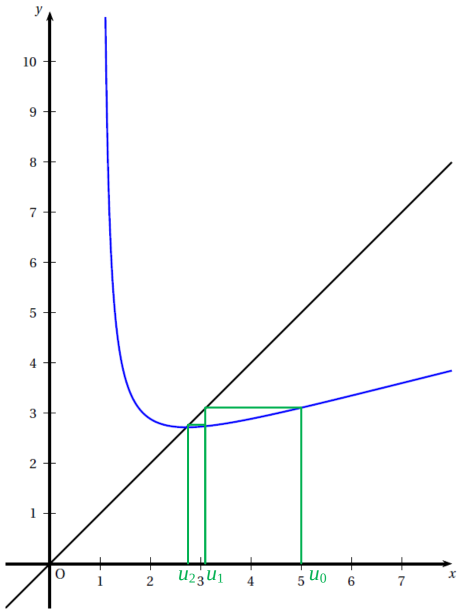
$f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$

c) $\begin{cases} f(e) = e \\ f \text{ strictement croissante sur }]e ; +\infty[\end{cases}$

donc, si $x > e$, alors $f(x) > e$.

Partie B

a)



- On peut conjecturer que (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente, vers une limite entre 2 et 3.

b) **1)** Comme dans l'exercice 2. , on va utiliser la Partie A ...

Posons $\mathscr{P}(n) : u_n > \mathrm{e}$.

- Initialisation :

  $u_0 = 5 > \mathrm{e}$
  donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier n quelconque.
  Alors :
  $u_n > \mathrm{e}$ par hypothèse de récurrence
  donc $f(u_n) > \mathrm{e}$ d'après la question *c)* de la Partie A
  et donc $u_{n+1} > \mathrm{e}$. → Làa aussi, on a u_{n+1} qui est $f(u_n)$.

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

2) Comme dans les exercices 2. et 3. :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n \ln u_n}{\ln u_n} = \frac{u_n(1 - \ln u_n)}{\ln u_n}$$

Or, d'après la question précédente, $u_n > \mathrm{e}$.
On en déduit que $u_n > 0$.
De plus, on en déduit $\ln u_n > \ln \mathrm{e}$ car la fonction $\ln$ est croissante,
c'est-à-dire $\ln u_n > 1$.

Alors, $\begin{cases} \text{d'une part, on a } \ln u_n > 0 \\ \text{d'autre part, on a } 1 - \ln u_n < 0 \text{ .} \end{cases}$

Conclusion : $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

3) Comme dans les exercices 2. et 3. :

$\begin{cases} \text{D'après la question 1. , elle est minorée par } \mathrm{e} \text{ ,} \\ \text{d'après la question 2. , elle est décroissante,} \end{cases}$

donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

4) $\ell = f(\ell)$

$\Leftrightarrow \ell = \dfrac{\ell}{\ln \ell}$

$\Leftrightarrow \ell \ln \ell = \ell$

$\Leftrightarrow \ell \ln \ell - \ell = 0$

$\Leftrightarrow \ell(\ln \ell - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \ \ell = 0$ ou $\ln \ell - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ \ell = 0$ ou $\ln \ell = 1$

$\Leftrightarrow \ \ell = 0$ ou $\ell = \mathrm{e}$

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \mathrm{e}$.
Donc, la limite ne peut pas être 0.
Donc, elle vaut e.

c) Cet algorithme calcule les termes successifs u_n dans la variable X et les rangs successifs dans la variables Y tant que les termes sont supérieurs à 2,72.
Il affiche le premier rang tel que le terme n'est plus supérieur à 2,72.

D'après le tableau, il affiche 3.