Savoir ÉTUDIER UNE FONCTION AVEC ln

Ce que je dois savoir faire

Avant de faire quoi que ce soit, **tracez votre fonction** sur la calculatrice et évitez de trouver des variations et des résultats incohérents avec cette courbe !

- **Calculer les limites**
  - Mêmes méthodes que d'habitude avec quatre nouvelles formules :

    $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$ et les deux "formes indéterminées du cours" $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$ par croissances comparées.

    Remarque : On peut ajouter, par inverse et positivité, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$.

    Remarque : Vous rencontrerez souvent des sommes indéterminées.
    Comme d'habitude, factorisez et vous tomberez souvent sur une forme indéterminée du cours.
  - Pour les limites de $\ln u(x)$, c'est la méthode des limites de fonctions composées :

    $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\ldots} u(x) = \ldots \\ \lim\limits_{X\to\ldots} \ln X = \ldots \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to\ldots} \ln(\,u(x)\,) = \ldots$

- **Calculer la dérivée**
  - Mêmes méthodes que d'habitude avec deux nouvelles formules :
    - la dérivée de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$;
    - la dérivée de $x \mapsto \ln u(x)$ est $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où u est une fonction usuelle dérivable, strictement positive.
  - N'oubliez pas de factoriser votre expression de $f'(x)$ pour en étudier facilement les signes.

- **Étudier les annulations et les signes de la dérivée**
  - Si $f'(x)$ est factorisée :
    1) Signalez tout de suite les facteurs de signe constant.
    2) Étudiez le signe des autres facteurs :
       - inutile de détailler les signes d'un facteur affine du type $ax + b$.
       - pour les facteurs du second degré, comme d'habitude, ils sont du signe du coefficient dominant à l'extérieur des racines.
  - Si $f'(x)$ ou un de ses facteurs n'est pas factorisable (par exemple du type $e^x - 1$ ou $\ln x - 1$) :
    1) Résolvez l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
    2) Les intervalles solutions donnent :
       - les zones où la dérivée est positive ($+$ dans le tableau),
       - les bornes sont les valeurs où la dérivée est nulle (0 dans le tableau).

       Le reste sont les zones où la dérivée est négative ($-$ dans le tableau).

- **Établir le tableau de variations**
  - Mêmes méthodes que d'habitude.
    N'oubliez pas de calculer les valeurs remarquables et de placer (voire de calculer si besoin) les limites aux bornes.

Ce que je dois aussi savoir faire

- **Déduire une asymptote d'une limite**
- **Calculer une équation de tangente**
- **Étudier les positions relatives de deux courbes**
- **Appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires** (appelé aussi **théorème de la bijection**) **pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution pour une équation du type $f(x) = k$**
- **Étudier les convexités et les points d'inflexion**

Remarques sur les exercices

- L'exercice ① est une série de petites études de fonctions sans difficulté, uniquement avec $\ln x$.
- L'exercice ② est une série de petites études de fonctions sans difficulté, uniquement avec des $\ln u(x)$.
- Les exercices suivants sont des types bac.

---

① Les exercices **1.** à **6.** sont indépendants mais ont les mêmes consignes.

Pour chacune des fonctions suivantes :
- calculer les limites aux bornes,
- calculer l'expression de la dérivée,
- établir le tableau de variations.

1. Soit la fonction h définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $h(x) = x + \ln x$.

2. On définit sur $]\,0\,;+\infty\,[$ la fonction f par $f(x) = x \ln x$.

3. On considère la fonction g définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x) = x - \ln x$.

4. Soit la fonction F telle que, pour tout x dans $]\,0\,;+\infty\,[$, on a $F(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

5. On définit sur $]\,0\,;+\infty\,[$ la fonction φ par $\varphi(x) = \ln x - 2x$.

6. Soit la fonction $G : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ définie sur $]\,0\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$.

---

② Les exercices **1.** à **3.** sont indépendants mais ont les mêmes consignes.

Pour chacune des fonctions suivantes :
- calculer les limites aux bornes,
- calculer l'expression de la dérivée,
- établir le tableau de variations.

1. Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,;1\,[$ par $g(x) = \ln(1 - x)$.

2. On considère sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ la fonction F définie par $F(x) = \ln(2x - 1)$.

3. On définit la fonction ψ sur $]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty\,[$ par $\psi(x) = \ln(x^2)$.

---

③ **Partie A**

Soit u la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 .

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

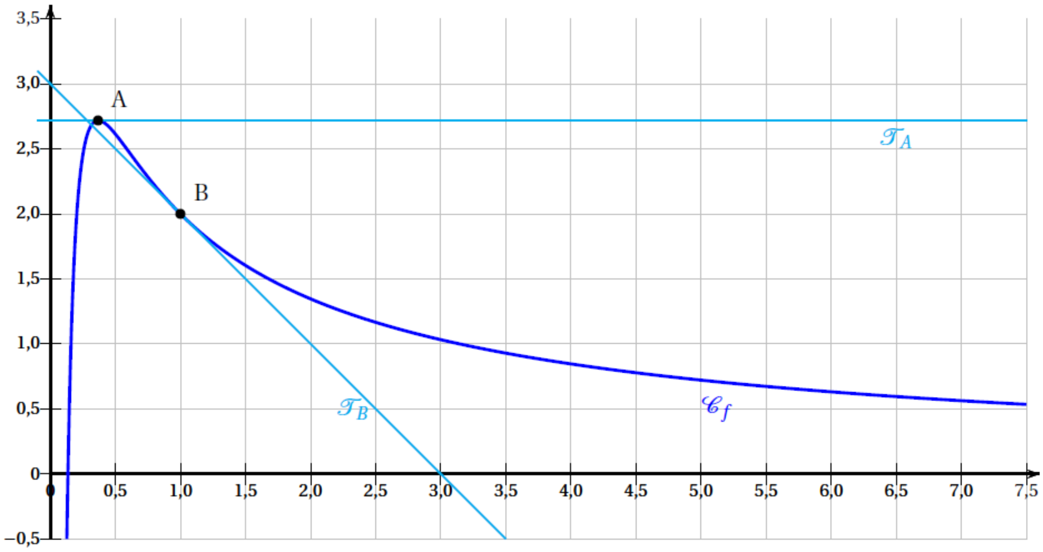
2. En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2015

④ Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$;
- la tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e} ; e\right)$;
- la tangente $\mathscr{T}_B$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1 ; 2)$.

La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3 ; 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

PARTIE I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.

2. En déduire une équation de la droite $\mathscr{T}_B$.

PARTIE II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2 + \ln(x)}{x}$.

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1 - \ln(x)}{x^2}$.

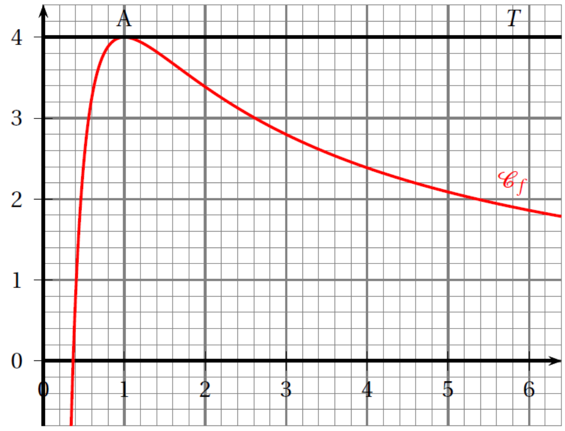
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f.
On admet que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1 + 2\ln(x)}{x^3}$.
Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

D'après Sujet 0 2021

⑤ Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point $A\,(\,1\,;\,4\,)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f\,'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$, où a et b sont deux nombres réels.

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a $f\,'(x) = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$.

3. En déduire les valeurs des réels a et b .

Dans la suite, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{4 + 4\ln x}{x}$.

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a $f\,''(x) = \dfrac{-4 + 8\ln x}{x^3}$.

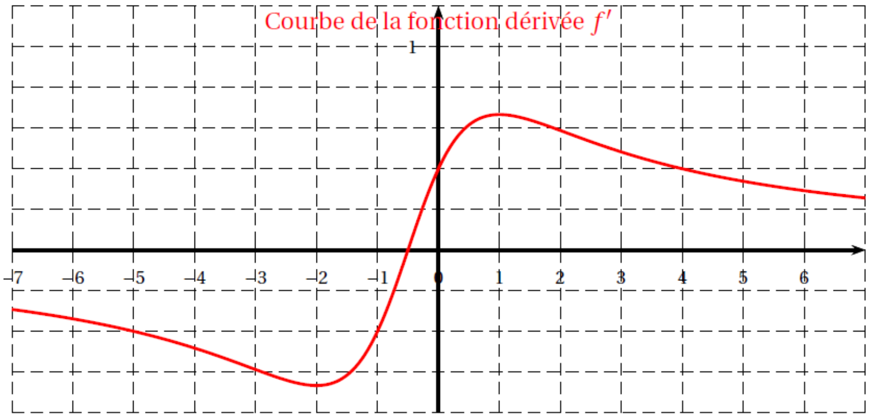
7. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2021

---

⑥ **Partie I : lectures graphiques**

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée $f\,'$.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.

2. **a.** Donner les variations de la fonction dérivée $f\,'$.

b. En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.

4. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)^2}$.

Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

D'après Baccalauréat Asie 2021

---

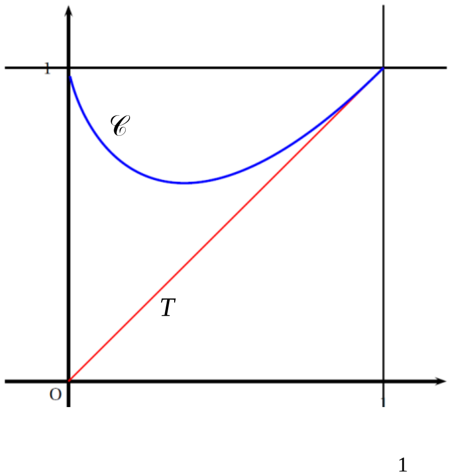
⑦ Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]\,0\,;1\,]$ par $f(x) = 1 + x\ln x$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]\,0\,;1\,]$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

T est la droite d'équation $y = x$.

La courbe $\mathscr{C}$ et la droite T sont représentées sur le schéma ci-dessous.



1. **a.** Justifier que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

b. En utilisant le signe de $x\ln x$ sur $]\,0\,;1\,]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in\,]\,0\,;1\,]$, on a $f(x) \leqslant 1$.

2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in\,]\,0\,;1\,]$.

b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in\,]\,0\,;1\,]$ par $g(x) = 1 + x\ln x - x$.

a. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]\,0\,;1\,]$ et dresser le tableau de variation de g.
On ne cherchera pas la limite de g en 0.

b. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

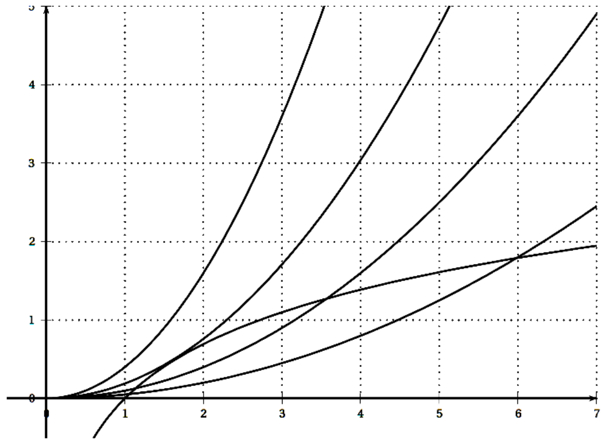
D'après Baccalauréat Antilles Septembre 2009

⑧ Ce problème était sur 6 points et est donc à faire en environ 72 minutes.
La question **1.** de la Partie A est à faire sur le graphique qui était donné en annexe et à rendre.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$.
Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x)=ax^2$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan.
Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit en **annexe** (*à rendre avec la copie*) les courbes $\mathscr{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.



1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.

2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h_a(x)=\ln x-ax^2$.

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x)=0$.

2. a. On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et on note h_a' la dérivée de la fonction h_a.
Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous :

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
signes de $h_a'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de h_a	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{-1-\ln(2a)}{2}$	↘	

Justifier, par le calcul, le signe de $h_a'(x)$ pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

b. Rappeler la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$ et en déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.
On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a=0,1$.

a. Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x)=0$ admet une unique solution.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\,;+\infty\right[$.

b. Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

a. Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.

b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$. Justifier.

5. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

D'après Baccalauréat Antilles 2015

⑨ Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$ par $f(x) = x - \ln(x-1)$.
On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I

La feuille de calcul ci-contre a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas?

2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie II

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f.
Montrer que, pour tout $x \in\,]\,1\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

b. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$, complété par les limites.

c. Justifier que, pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

Partie III

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.
Donner la valeur de ℓ.

D'après Baccalauréat Asie 2021

⑩ Cet exercice est composé de deux parties. Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[\,1\,;4\,]$ par $f(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[\,1\,;4\,]$, montrer que $f'(x) = \dfrac{35-30x}{x}$.

b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[\,1\,;4\,]$.

c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.

2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[\,1\,;4\,]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [\,1\,;4\,]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[\,1\,;4\,]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ donné en milliers d'euros par l'expression $B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x$.

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.
On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2. Pour tout x de l'intervalle $[\,1\,;4\,]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

3. **a.** À l'aide des résultats de la **Partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[\,1\,;4\,]$.

b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

D'après Baccalauréat Polynésie 2021