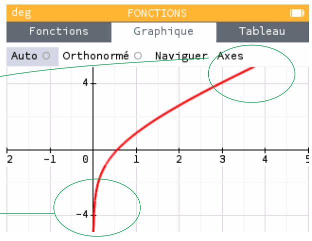
Correction de **FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN - Fiche 2**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥

① **1.** Commençons par tracer la courbe sur la calculatrice pour conjecturer les limites et les variations :



- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to0+} \ln x = -\infty \end{cases}$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to0+} h(x) = -\infty$.

- h est de la forme $u + v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

  Donc, par somme, h est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $h' = u' + v'$.

  Donc $h'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

  $= \dfrac{x+1}{x}$ → Je n'oublie pas de factoriser pour l'étude des signes.

Remarquez que, même sans avoir factorisé, on pouvait trouver le signe :

$x \in\,]\,0\,;+\infty\,[$ donc $\dfrac{1}{x} > 0$

et donc $1 + \dfrac{1}{x} > 0$

- En regardant la courbe donnée par la calculatrice, on peut se douter que la dérivée sera positive... En effet :

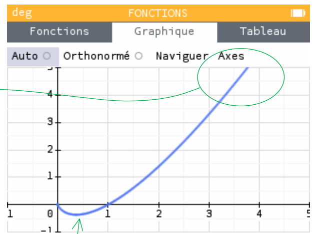
  $x \in\,]\,0\,;+\infty\,[$ donc $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ et donc $\dfrac{x+1}{x} > 0$

-

x	0		$+\infty$
signes de $h'(x)$	‖	$+$	
variations de h	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

CONTRÔLEZ VOTRE TABLEAU AVEC VOTRE COURBE !!!

2. Traçons la courbe sur la calculatrice :



- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

  donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0+} x \ln x = 0$. → Dans le cours...

- f est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

  Donc, par produit, f est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $f' = u'v + uv'$.

  Donc $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x}$

  $= \ln x + 1$ → <u>Impossible de factoriser</u>...

- $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geqslant 0$ → ... on cherche alors par équivalences quand la dérivée est positive.

  $\Leftrightarrow \ln x \geqslant -1$

  $\Leftrightarrow e^{\ln x} \geqslant e^{-1}$ car exp croissante

  $\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{e}$

La dérivée est positive...

... quand x est supérieur à $\dfrac{1}{e}$.

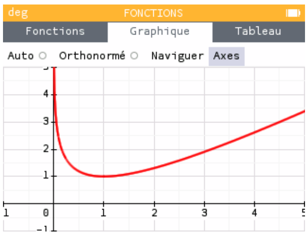
-

x	0		$1/e$		$+\infty$
signes de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	‖ 0	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗	$+\infty$

$f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} \ln \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{e} \ln e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$

On peut vérifier sur le graphique que le sommet a pour abscisse $\dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$ et pour ordonnée $-\dfrac{1}{e} \approx -0{,}37$.

3.



- $x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ → *J'ai une somme indéterminée, donc je factorise pour lever l'indétermination..*

  $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$

  donc, par somme puis par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. → *Cohérent avec le graphique de la calculatrice.*

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to0+} \ln x = -\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to0+} (-\ln x) = +\infty \end{cases}$

  donc, par somme, $\lim\limits_{x\to0+} g(x) = +\infty$. → *Cohérent avec le graphique de la calculatrice.*

- g est de la forme $u - v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{x} . \end{cases}$

  Donc, par somme, g est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $g' = u' - v'$.

  Donc $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

  $= \dfrac{x-1}{x}$ → *Je n'oublie pas de factoriser pour l'étude des signes.*

Pour l'étude des signes et des annulations, il est plus rapide d'inclure les signes de $x - 1$ *et* signes de x *dans le tableau :*

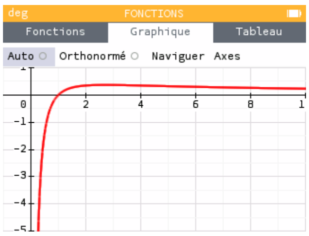
-

x	0		1		$+\infty$
signes de $x-1$		$-$	0	$+$	
signes de x	0	$+$		$+$	
signes de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de g	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$g(1) = 1 - \ln 1 = 1$

Cohérent avec le graphique de la calculatrice.

4.



- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées → *Cohérent avec le graphique de la calculatrice.*

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0+} x = 0 \text{ avec } x \text{ positif, donc par inverse, } \lim\limits_{x\to0+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to0+} \ln x = -\infty \end{cases}$

  donc, par produit, $\lim\limits_{x\to0+} F(x) = -\infty$. → *Cohérent avec le graphique de la calculatrice.*

- F est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = \ln x \text{ et } u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x \text{ et } v'(x) = 1 . \end{cases}$

  Donc, par quotient, F est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $F' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

  Donc $F'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - (\ln x)\times 1}{x^2}$

  $= \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ → *__Numérateur impossible à factoriser__...*

- $x^2 > 0$ pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty\,[$ donc $F'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$.

$F\,'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \ln x \geqslant 0$ → ... on cherche alors par équivalences quand il est positif.

$\iff \ln x \leqslant 1$

$\iff e^{\ln x} \leqslant e^1$ car exp croissante

$\iff x \leqslant e$ → Vérifiez si la courbe est bien croissante pour $x \leqslant 2{,}7\ldots$.

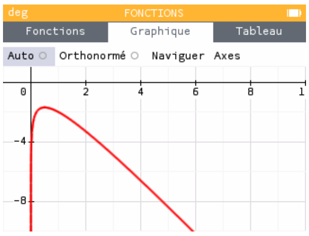
-

x	0		e		$+\infty$
signes de $F\,'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de F	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$F(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

On peut vérifier sur le graphique que le sommet a pour abscisse $e \approx 2{,}7\ldots$ et pour ordonnée $\frac{1}{e} \approx 0{,}37\ldots$.

5.



- $\ln x - 2x = x\left(\frac{\ln x}{x} - 2\right)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissances comparées, donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - 2\right) = -2 \end{cases}$$

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$.

- $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0+} (-2x) = 0 \end{cases}$$

donc, par somme, $\lim\limits_{x\to0+} \varphi(x) = -\infty$.

- φ est de la forme $u - v$ avec $\begin{cases} u(x) = \ln x \text{ et } u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = 2x \text{ et } v'(x) = 2 . \end{cases}$

Donc, par somme, φ est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $\varphi' = u' - v'$.

Donc $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2$

$= \frac{1-2x}{x}$ → Je n'oublie pas de factoriser pour l'étude des signes.

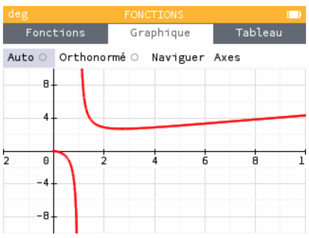
Pour l'étude des signes et des annulations, il est plus rapide d'inclure les signes de $1 - 2x$ et signes de x dans le tableau :

x	0		$1/2$		$+\infty$
signes de $1 - 2x$		$+$	0	$-$	
signes de x	0	$+$		$+$	
signes de $\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de φ	‖ $-\infty$	↗	$-\ln 2 - 1$	↘	$-\infty$

On peut vérifier sur le graphique que le sommet a pour abscisse $\frac{1}{2}$ et pour ordonnée $-\ln 2 - 1 \approx -1{,}7$.

$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} - 2\times\frac{1}{2} = -\ln 2 - 1$

6.



- Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ avec $\frac{\ln x}{x}$ positif

donc, par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$.

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0+} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty \text{ donc, par inverse, } \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$

  donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 0+} G(x) = 0$.

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1+} x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1+} \ln x = 0 \text{ avec } \ln x \text{ positif, donc, par inverse, } \lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{1}{\ln x} = +\infty \end{cases}$

  donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 1+} G(x) = +\infty$.

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1-} x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1-} \ln x = 0 \text{ avec } \ln x \text{ négatif, donc, par inverse, } \lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{1}{\ln x} = -\infty \end{cases}$

  donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 1-} G(x) = -\infty$.

- G est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

  Donc, par quotient, G est dérivable sur $]\,0\,;1\,[\, \cup \,]\,1\,;+\infty\,[$ et $G' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

  Donc $G'(x) = \dfrac{1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

  $= \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ → *Encore un <u>numérateur impossible à factoriser</u>...*

- $(\ln x)^2 > 0$ pour tout $x \in \,]\,0\,;1\,[\, \cup \,]\,1\,;+\infty\,[$ donc $G'(x)$ est du signe de $\ln x - 1$.

  $G'(x) \geqslant 0 \iff \ln x - 1 \geqslant 0$

  $\iff \ln x \geqslant 1$

  $\iff e^{\ln x} \geqslant e^1$ car exp croissante

  $\iff x \geqslant e$ → *Vérifiez si la courbe est bien croissante pour* $x > 2{,}7...$.

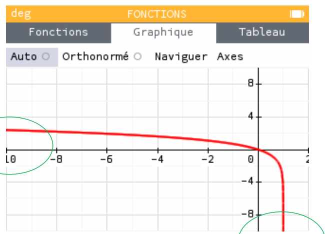
x	0		1		e		$+\infty$
signes de $G'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
variations de G	‖ 0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

$G(e) = \dfrac{e}{\ln e} = e$

② **1.**

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

  donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.



- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1-} (1 - x) = 0 \text{ par valeurs positives} \\ \lim\limits_{X \to 0+} \ln X = -\infty \end{cases}$

  donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 1-} g(x) = -\infty$.

- g est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 1 - x$ et $u'(x) = -1$.

  Donc, par composition, g est dérivable sur $]-\infty\,;1\,[$ et $g' = \dfrac{u'}{u}$.

  Donc $g'(x) = \dfrac{-1}{1-x}$.

- *En regardant la courbe donnée par la calculatrice, on peut se douter que la dérivée sera négative...*
  En effet :

  $\begin{cases} -1 < 0 \\ x \in \,]-\infty\,;1\,[\text{ donc } 1 - x > 0 \end{cases}$ et donc $\dfrac{-1}{1-x} < 0$

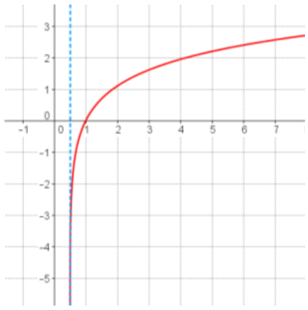
-

x	$-\infty$		1
signes de $g'(x)$		$-$	‖
variations de g	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖

2.

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1/2+} (2x-1) = 0 \text{ par valeurs positives} \\ \lim\limits_{X \to 0+} \ln X = -\infty \end{cases}$

  donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 1/2+} F(x) = -\infty$.



- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

  donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

- F est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 2x-1$ et $u'(x) = 2$.
  Donc, par composition, F est dérivable sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ et $F' = \frac{u'}{u}$.

  Donc $F'(x) = \frac{2}{2x-1}$.

- $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{2x-1} = 0$
  $\Leftrightarrow 2 = 0$: impossible

- Comme il n'y a pas d'annulation (et que la fonction F' est continue sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$), le signe sera constant :

  $\begin{cases} 2 > 0 \\ x \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[\text{ donc } 2x-1 > 0 \end{cases}$ et donc $\frac{2}{2x-1} > 0$

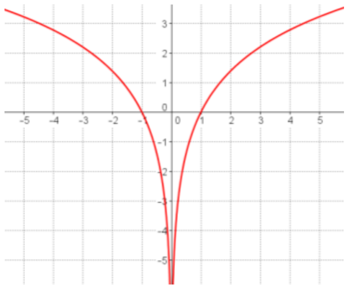
-

x	$1/2$	$+\infty$
signes de $F'(x)$	||	+
variations de F	|| $-\infty$	↗ $+\infty$

3.

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

  donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$.



- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

  donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} \psi(x) = +\infty$.

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0-} x^2 = 0 \text{ avec } x^2 \text{ positif} \\ \lim\limits_{X \to 0+} \ln X = -\infty \end{cases}$

  donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0-} \psi(x) = -\infty$.

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0+} x^2 = 0 \text{ avec } x^2 \text{ positif} \\ \lim\limits_{X \to 0+} \ln X = -\infty \end{cases}$

  donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0+} \psi(x) = -\infty$.

- ψ est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$.
  Donc, par composition, ψ est dérivable sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ et $\psi' = \frac{u'}{u}$.

  Donc $\psi'(x) = \frac{2x}{x^2}$
  $= \frac{2}{x}$.

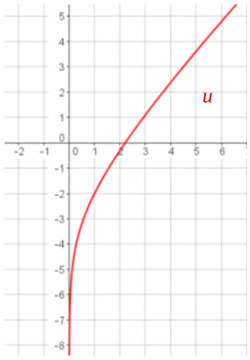
- $\psi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 0$
  $\Leftrightarrow 2 = 0$: impossible

Il n'y a pas d'annulation mais cette fois, la fonction ψ' n'est pas continue… Elle peut donc changer de signe !
On peut intégrer l'étude de signes dans le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signes de x		$-$	0	$+$	
signes de $g'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
variations de g	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

③ **Correction non détaillée**

Partie A



1. On calcule la dérivée et on trouve $u'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{1+x}{x}$.

On fait proprement une étude de signes : le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

2. Vous allez appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
Il faut donc vérifier et rédiger soigneusement les trois conditions :

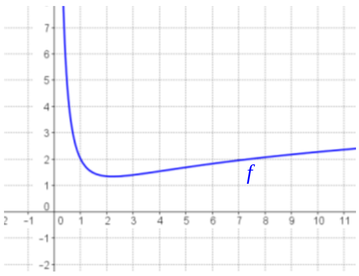
- u continue sur $[\,2\,;3\,]$: n'oubliez pas de préciser l'intervalle.
  Vous pouvez préciser qu'elle l'est comme somme de fonctions continues.

- u strictement croissante sur $[\,2\,;3\,]$: n'oubliez pas de préciser l'intervalle.

- 0 compris entre $u(2) = \ln 2 + 2 - 3 = -0{,}30\ldots$ et $u(3) = \ln 3 + 3 - 3 = 1{,}09\ldots$

3. Un grand classique : α sert à séparer en deux intervalles.
u strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $u(\alpha) = 0$
donc u négative sur $]\,0\,;\alpha\,[$ et positive sur $]\,\alpha\,;+\infty\,[$.
Vous pouvez l'illustrer par un tableau de variation avec α et 0 (mais attention à la double barre en 0).

Partie B Vous savez déjà que la fonction u va servir dans cette partie…



Avant même de commencer, on trace la courbe !

1. Ce n'est pas une forme indéterminée…
La limite de $1 - \dfrac{1}{x}$ est $-\infty$ (comme x tend vers $0+$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$).
La limite de $\ln x$ et donc de $\ln x - 2$ est $-\infty$, c'est le cours.
On justifie $+\infty$ par produit.

2. **a.** Calcul sans gros problème en posant f de la forme $uv + 2$.

b. N'oubliez pas de préciser ce que vous faites de x^2.
$f'(x)$ est donc du signe de $u(x)$ qu'on connaît de la Parie A.
Vous aurez donc un tableau de variations avec α dans la ligne des x.
Et vérifiez sur votre courbe que tout va bien !

Partie C

1. Aucun problème : on développe, on supprime ce qui s'élimine et on factorise.

2. Il suffit de résoudre l'équation $\dfrac{2 - \ln(x)}{x} = 0$.

N'oubliez pas que : $\dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ sur tout intervalle où b est non nul.

On a donc simplement à résoudre $2 - \ln x = 0$ et on trouve une seule solution e^2.
C'est l'abscisse du point, trouvez son ordonnée.

④ **Partie I**

1. $f\,'(\frac{1}{e})$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$, c'est-à-dire $\mathcal{T}_A$.

Cette tangente est horizontale donc : $f\,'(\frac{1}{e}) = 0$.

$f\,'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1, c'est-à-dire $\mathcal{T}_B$.

L'énoncé nous donne deux points $(1\,;2)$ et $(3\,;0)$ de cette tangente.

Pour aller de $(1\,;2)$ à $(3\,;0)$, on avance de 2 unités et on descend de 2 unités, donc le coefficient directeur vaut $\frac{-2}{2}$: $f\,'(1) = -1$.

2. $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f\,'(1) = -1 \end{cases}$

La tangente $\mathcal{T}_B$ a pour équation cartésienne :

$y = f\,'(1)\,(x - 1) + f(1)$

$\Leftrightarrow\ y = -1\,(x - 1) + 2$

$\Leftrightarrow\ y = -x + 3$

Partie II

1. Pour montrer qu'une courbe $\mathcal{C}_f$ passe par un point $(a\,;b)$, il suffit que $f(a)$ soit égal à b .

Correction non détaillée : Pour A et B, on calcule donc $f(\frac{1}{e})$ et $f(1)$ et on trouve bien e et 2 .

Pour l'unique point de l'axe des abscisses, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow\ \frac{2 + \ln(x)}{x} = 0$

$\Leftrightarrow\ 2 + \ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow\ \ln(x) = -2$

$\Leftrightarrow\ e^{\ln(x)} = e^{-2}$

$\Leftrightarrow\ x = e^{-2}$ → On vient de trouver une unique abscisse (qu'on peut écrire $\frac{1}{e^2}$).

Donc, $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point unique $(e^{-2}\,;0)$. → Inutile de calculer l'ordonnée ! C'est 0 .

2. • En $0+$, on évalue la limite au brouillon et on voit que ce n'est pas un quotient indéterminé.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} (2 + \ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+} x = 0 \text{ avec } x \text{ positif} \end{cases}$ → Il est indispensable de préciser le signe de x pour choisir entre $+\infty$ et $-\infty$.

donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -\infty$.

• En $+\infty$, on évalue la limite au brouillon et on voit que c'est un quotient indéterminé.

Une indétermination avec du logarithme, vous vous doutez qu'on va utiliser une des deux croissances comparées du cours.

$\frac{2 + \ln(x)}{x} = \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

3. **Correction non détaillée** : calcul sans problème en posant f de la forme $\frac{u}{v}$.

4. Pour l'étude des signes, le numérateur est bien sympathique (x^2 est toujours positif sur $]\,0\,;+\infty\,[$ donc $f\,'(x)$ est du signe de $-1 - \ln x$)

mais le numérateur ne se factorise pas. Il faut donc résoudre une inéquation :

$-1 - \ln x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow\ \ln x \leqslant -1$

$\Leftrightarrow\ e^{\ln x} \leqslant e^{-1}$ car exp est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\Leftrightarrow\ x \leqslant e^{-1}$ (qu'on peut écrire $\frac{1}{e}$)

$f\,'(x)$ s'annule donc en e^{-1} et est positive quand $x \leqslant e^{-1}$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
signes de $f\,'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	e	↘	0

$f(e^{-1}) = e$ d'après **1.**

5. f *est convexe lorsque* $f''(x)$ *est positif.*

$f''(x) > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3} > 0$

Attention, le dénominateur n'est pas x^2 *mais* x^3 .
Heureusement, nous sommes sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

$\Leftrightarrow 1+2\ln(x) > 0$ car x^3 toujours positif sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\Leftrightarrow 2\ln(x) > -1$

$\Leftrightarrow \ln(x) > -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(x)} > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ car exp est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ *(qu'on peut écrire* $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ *)*

Donc, f est convexe sur $]\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,;+\infty\,[$.

On peut le vérifier graphiquement en voyant que la courbe devient en effet "souriante" à partir de $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}6$.

---

⑤ **1.** $\mathscr{C}_f$ passe par $A\,(\,1\,;4\,)$
donc $f(1)=4$.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1, c'est-à-dire T .
Cette tangente est horizontale donc : $f'(1)=0$.

2. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x)=a+b\ln x \text{ et } u'(x)=b\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{b}{x} \\ v(x)=x \text{ et } v'(x)=1\,. \end{cases}$

Donc, par quotient, f est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

$$\text{Donc } f'(x)=\frac{\frac{b}{x}\times x-(\,a+b\ln x\,)\times 1}{x^2}$$

$$=\frac{b-a-b\ln x}{x^2}$$

3. *Lorsqu'il faut déterminer les valeurs de paramètres d'une fonction, il faut utiliser les valeurs numériques particulières données par l'énoncé.*
Ici, ce seront les valeurs de $f(1)$ *et de* $f'(1)$ *du* **1.** .

$f(1)=4$
donc $\dfrac{a+b\ln 1}{1}=4$ $\longrightarrow$ *On est bien content que* $\ln 1$ *fasse* 0 .
et donc $a=4$

$f'(1)=0$
donc $\dfrac{b-4-b\ln 1}{1^2}=0$
donc $b-4=0$
et donc $b=4$

4. ◆ *En* $0+$ *, on évalue la limite au brouillon et on voit que ce n'est pas un quotient indéterminé.*

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+}\,(\,4+4\ln x\,)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+} x=0 \text{ avec } x \text{ positif} \end{cases}$ $\longrightarrow$ *Il est indispensable de préciser le signe de* x *pour choisir entre* $+\infty$ *et* $-\infty$.

donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$. $\longrightarrow$ *Vérifié sur la courbe.*

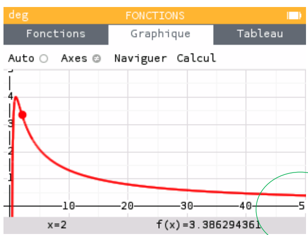
◆ *En* $+\infty$ *, on évalue la limite au brouillon et on voit que c'est un quotient indéterminé.*
Une indétermination avec du logarithme, vous vous doutez qu'on va utiliser une des deux croissances comparées du cours.

$\dfrac{4+4\ln(x)}{x}=\dfrac{4}{x}+4\times\dfrac{\ln x}{x}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. $\longrightarrow$ *Peu vérifiable sur la courbe.*

On peut la tracer sur calculatrice
et mettre une grande valeur pour Xmax :



5. D'après la question **2.**, $f'(x) = \dfrac{4-4-4\ln x}{x^2} = \dfrac{-4\ln x}{x^2}$.

x^2 est toujours positif sur $]0\,;+\infty[$ donc $f'(x)$ est du signe de $-4\ln x$.

$-4\ln x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \ln x \leqslant 0$

$\Leftrightarrow x \leqslant 1$ → Inutile d'utiliser exp, on sait résoudre cette inéquation d'après le cours.

$f'(x)$ s'annule donc en 1 et est positive quand $x \leqslant 1$.

x	0		1		$+\infty$
signes de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	4	↘	0

$f(1)=4$ d'après **1.**

Vérifié sur la courbe.

6. Le calcul de $f''(x)$ n'est rien d'autre qu'un calcul habituel de dérivée, en utilisant f' comme fonction à dériver.

f' est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = -4\ln x \text{ et } u'(x) = -4\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{-4}{x} \\ v(x) = x^2 \text{ et } v'(x) = 2x\,. \end{cases}$

Donc, par quotient, f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

$$\text{Donc } f''(x) = \dfrac{\dfrac{-4}{x}\times x^2 - (-4\ln x)\times 2x}{(x^2)^2}$$

$$= \dfrac{-4x+8x\ln x}{x^4}$$

$$= \dfrac{-4+8\ln x}{x^3}$$

7. $\mathscr{C}_f$ possède un point d'inflexion lorsque $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

$f''(x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-4+8\ln x}{x^3} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow -4+8\ln x \geqslant 0$ → Le dénominateur n'a aucune importance pour une annulation, seul le numérateur peut annuler le quotient…

$\Leftrightarrow \ln x \geqslant \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} \geqslant e^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ (qu'on peut écrire $\sqrt{e}$)

donc $f''(x)$ s'annule et change de signe en une seule valeur
donc $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion.

En résolvant $f''(x)=0$, on aurait trouvé une unique annulation.
En résolvant $f''(x)\geqslant 0$, on montre de plus que $f''(x)$ n'est positif que d'un côté de $e^{\frac{1}{2}}$ et donc change de signe.

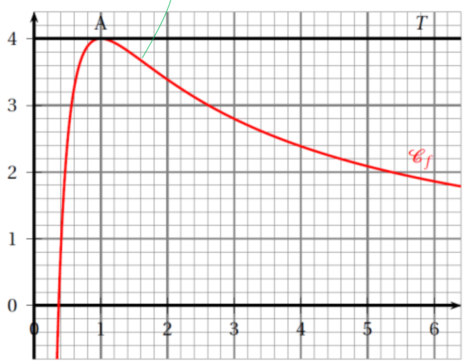
Pour conclure, il faut calculer l'ordonnée :

$$f(e^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{4+4\ln e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4+4\times\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} = 6\,e^{-\frac{1}{2}} \text{ (qu'on peut écrire } \dfrac{6}{\sqrt{e}}\text{)}$$

Donc, l'unique point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ est $B\,(e^{\frac{1}{2}}\,;6\,e^{-\frac{1}{2}})$.

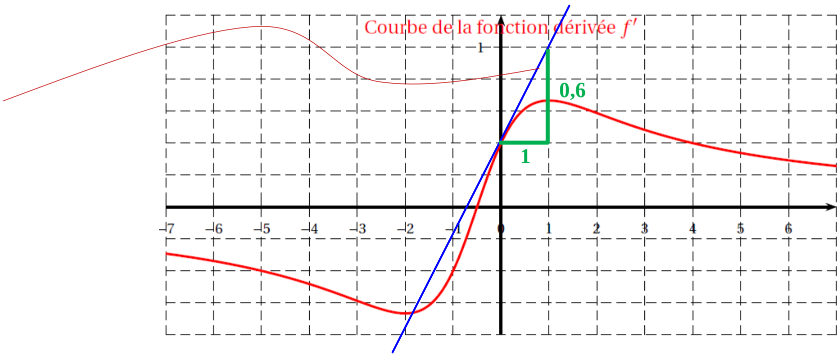
On peut le vérifier graphiquement.

$\begin{cases} e^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}6 \\ 6\,e^{-\frac{1}{2}} \approx 3{,}6 \end{cases}$ et on voit que ce sont bien les coordonnées du point où la courbe change de convexité :



⑥ **Partie I**

1. La tangente n'est pas tracée !
Il faut donc le faire du mieux qu'on peut...



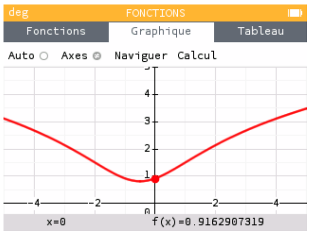
Le coefficient se lit avec le principe de l'escalier : on avance de 1 unité et on monte de 0,6 (en fait de 3 carreaux, mais chaque carreau vaut 0,2).
Par lecture graphique, le coefficient directeur de la tangente est 0,6.

2. a. Par lecture graphique, f' est décroissante sur $]-\infty\,;-2\,[$, croissante sur $]-2\,;1\,[$ puis décroissante sur $]\,1\,;+\infty\,[$.
On aurait pu faire un tableau de variations.

b. Une fonction est convexe lorsque sa dérivée est croissante.
f est convexe sur $]-2\,;1\,[$.

Partie II

Attention ! Pas question de contrôler ses résultats en regardant la courbe fournie...
Ce n'est pas celle de f mais celle de f' .



1. On a repéré une composition de fonctions : $x \mapsto x^2+x+\frac{5}{2} \mapsto \ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X=+\infty \end{cases}$

  donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. $\longrightarrow$ Vérifié sur la courbe.

- La limite en $-\infty$ est plus délicate car il y a une somme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$ sur $x^2+x+\frac{5}{2}$.

  $x^2+x+\frac{5}{2}=x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{2x^2}\right)$

  $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{2x^2}\right)=1 \end{cases}$

  donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)=+\infty$.

  $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X=+\infty \end{cases}$

  donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. $\longrightarrow$ Vérifié sur la courbe.

2. f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x)=x^2+x+\frac{5}{2}$ et $u'(x)=2x+1$.

L'énoncé nous annonce dès le début de cette partie que f est définie sur $\mathbb{R}$.
Cela sous-entend que $x^2+x+\frac{5}{2}$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ sans qu'on nous demande de le justifier.
Mais il est tout de même gênant d'écrire $\frac{u'}{u}$ sans avoir écrit que u est non nulle !

$x^2+x+\frac{5}{2}$ a pour discriminant $\Delta=1^2-4\times1\times\frac{5}{2}=-9<0$

Donc $x^2+x+\frac{5}{2}$ ne s'annule pas et est strictement positif car du signe de son coefficient dominant 1 .

Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'=\frac{u'}{u}$.

Donc $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$

3. $x^2 + x + \frac{5}{2}$ est toujours positif sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x + 1$.

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
signes de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	↘	$\ln\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$

$f(-\frac{1}{2}) = \ln\left((-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \right)$

$= \ln\frac{9}{4}$

Vérifié sur la courbe.

4. a. $\begin{cases} \text{D'après le tableau de variations, } f \text{ est continue et strictement croissante sur } [-\frac{1}{2}\,;+\infty[\\ 2 \text{ est compris entre } f(-\frac{1}{2}) = \ln\frac{9}{4} = 0{,}8\ldots \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,. \end{cases}$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

b. On demande une valeur approchée au dixième, qu'il faut comprendre plutôt comme l'arrondi.
Le mieux est de donner un encadrement au centième et d'en déduire la valeur.
Attention à bien justifier l'encadrement par le calcul des deux valeurs :

D'après la calculatrice, $\begin{cases} f(1{,}76) = 1{,}995\ldots \\ f(1{,}77) = 2{,}001\ldots \end{cases}$

$1{,}76 < \alpha < 1{,}77$
et donc la valeur approchée à 10^{-1} est 1,8. → À peu près vérifié sur la courbe.

5. La courbe possède un point d'inflexion lorsque $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

$\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2$ est toujours positif donc les signes de $f''(x)$ ne dépendent que de $-2x^2 - 2x + 4$.

$f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} = 0$

$\Leftrightarrow -2x^2 - 2x + 4 = 0$ → Le dénominateur n'a aucune importance pour une annulation, seul le numérateur peut annuler le quotient...

$\Delta = (-2)^2 - 4\times(-2)\times 4 = 36 > 0$

donc $f''(x)$ s'annule et change de signe en deux valeurs
donc la courbe possède deux points d'inflexion.

Les coordonnées ne sont pas demandées.

Les deux abscisses sont $\dfrac{-(-2) + \sqrt{36}}{2\times(-2)} = -2$ et $\dfrac{-(-2) - \sqrt{36}}{2\times(-2)} = 1$.

Calculons leurs ordonnées $\begin{cases} f(-2) = \ln\left((-2)^2 - 2 + \frac{5}{2} \right) = \ln\frac{9}{2} \approx 1{,}5 \\ f(1) = \ln\left(1^2 + 1 + \frac{5}{2} \right) = \ln\frac{9}{2} \approx 1{,}5\,. \end{cases}$

Les deux points d'inflexion sont proches de $(-2\,;1{,}5)$ et $(1\,;1{,}5)$. Qu'on peut vérifier sur la courbe.