Savoir UTILISER $\ln$ *POUR RÉSOUDRE UNE (IN)ÉQUATION DONT L'INCONNUE EST UN EXPOSANT*

Ce que je dois savoir

- **La formule** $\ln \mathrm{e}^{u(x)} = u(x)$ pour un exposant réel de e
- **La formule** $\ln a^n = n \ln a$ pour un exposant entier d'un réel a

Ce que je dois savoir faire

- **Transformer une (in)équation dont l'inconnue est un exposant réel de e**
  - Vous devez pouvoir appliquer les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \dots \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{u(x)} &= \dots && \longrightarrow \text{Il peut y avoir des transformations avant pour arriver à } \mathrm{e}^{u(x)}. \\ \Leftrightarrow \quad \ln \mathrm{e}^{u(x)} &= \ln \dots && \longrightarrow \text{On applique la fonction } \ln \text{ des deux côtés de l'égalité.} \\ \Leftrightarrow \quad u(x) &= \ln \dots \end{aligned}$$

  On continue à transformer en gardant la valeur exacte $\ln \dots$.

  - Même chose avec les inéquations :

$$\begin{aligned} \dots \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{u(x)} &\leqslant \dots \\ \Leftrightarrow \quad \ln \mathrm{e}^{u(x)} &\leqslant \ln \dots \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]\,0\,;+\infty\,[\\ \Leftrightarrow \quad u(x) &\leqslant \ln \dots \end{aligned}$$

  On continue à transformer en gardant la valeur exacte $\ln \dots$.

- **Transformer une équation dont l'inconnue est un exposant entier d'un réel**
  - Vous devez pouvoir appliquer les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \dots \Leftrightarrow \quad a^n &= \dots && \longrightarrow \text{Il peut y avoir des transformations avant pour arriver à } a^n. \\ \Leftrightarrow \quad \ln a^n &= \ln \dots && \longrightarrow \text{En effet, n'appliquez pas } \ln \text{ sur autre chose que } a^n. \\ \Leftrightarrow \quad n \ln a &= \ln \dots && \longrightarrow \text{L'exposant inconnu devient un simple multiplicateur.} \\ \Leftrightarrow \quad n &= \frac{\ln \dots}{\ln a} && \longrightarrow \text{Reste à espérer que le quotient est un entier.} \end{aligned}$$

- **Transformer une inéquation pour pouvoir appliquer la formule précédente**
  - Vous devez pour voir appliquer les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \dots &\leqslant \dots && \longrightarrow \text{Il peut y avoir des transformations avant pour arriver à } a^n. \\ \Leftrightarrow \quad a^n &\leqslant \dots \\ \Leftrightarrow \quad \ln a^n &\leqslant \ln \dots \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]\,0\,;+\infty\,[\\ \Leftrightarrow \quad n \ln a &\leqslant \ln \dots \end{aligned}$$

  Et là, on fait très attention…
  La division par $\ln a$ conserve l'ordre si $\ln a > 0$, c'est-à-dire si $a > 1$.
  La division par $\ln a$ inverse l'ordre si $\ln a < 0$, c'est-à-dire si $a < 1$.

  - On conclut en se ramenant à l'entier qui convient.
    Par exemple : $n \leqslant 17{,}8\dots \Leftrightarrow n \leqslant 17$
    et : $n \geqslant 17{,}8\dots \Leftrightarrow n \geqslant 18$

Remarques sur les exercices

- L'exercice 1 propose des (in)équations avec des inconnues réelles en exposant de e .
  On retrouve ce type d'inéquations dans les **études de fonctions** de l'exercice 2.
- À partir de l'exercice 3, vous n'aurez à trouver que des exposants entiers.
  Vous trouverez trois types de situations :
  - dans les exercices avec **suites géométriques** (exercices 4 à 6), avec l'expression $u_0\, q^n$;
  - dans les exercices avec la **loi binomiale** (exercices 7 à 9), car $P(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n$ vaut $(1-p)^n$
    et $P(X = n) = \binom{n}{n} p^n (1-p)^0$ vaut p^n .

① **1.** Résoudre dans ℝ l'équation : $1 + e^{x+1} = 3$.

2. Résoudre dans ℝ l'équation : $e^{2x} - 1 = 3$.

3. Résoudre dans ℝ l'inéquation : $1 - 2e^{1-2x} < 0$.

4. Résoudre dans ℝ l'inéquation : $5 - 3e^{-x} \geqslant 0$.

Pour les deux questions suivantes, pensez que e^{2x} est le carré de e^{x}.

5. Résoudre dans ℝ l'inéquation : $2e^{2x} - 5e^{x} > 0$.

6. Résoudre dans ℝ l'équation : $3e^{-2x} - 10e^{-x} + 3 = 0$.

---

② **1.** Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = 3x + 3 - e^{x}$.
Établir le tableau de variations de la fonction f (les limites ne sont pas demandées).

2. Soit la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = e^{x-1} - 2x$.
Établir le tableau de variations de la fonction g (les limites ne sont pas demandées).

---

③ **1.** Résoudre dans ℕ l'équation : $5 \times 7^{n} = 84\,035$.

2. Résoudre dans ℕ l'équation : $10\,000 - 3 \times 2^{n} = 3\,856$.

3. Résoudre dans ℕ l'inéquation : $1 - 2 \times 0{,}8^{n} \leqslant 0{,}95$.

4. Résoudre dans ℕ l'inéquation : $12 + 2 \times 5^{n} > 10^{6}$.

---

④ **1.** La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 1,2.
Justifier que (u_n) tend vers $+\infty$ et déterminer le rang du premier terme qui dépasse 10^{9}.

2. La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $\dfrac{3}{4}$.
Justifier que (v_n) tend vers 0 et déterminer le rang du premier terme qui est strictement inférieur à 10^{-5}.

---

⑤ On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes.
Ainsi $u_0 = 10$.

a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2014

---

⑥ Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique, on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du $n^{\text{ème}}$ jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du $n^{\text{ème}}$ jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4} a_n + 330$.

3. On a programmé en langage Python la fonction `vol()` ci-contre :

Recopier l'algorithme en complétant les parties manquantes pour qu'il retourne le rang du premier terme a_n supérieur ou égal à 1 100 .

```
def vol() :
    a = …
    n = …
    while … :
        a = …
        n = …
return …
```

4. Pour tout entier naturel n , on note $u_n = a_n - 1\,320$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer u_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = 1\,320 - 520\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau. Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2014

---

⑦ Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et $0{,}65$.

a. Exprimer $P(X = 0)$ en fonction de n .

b. Déterminer les valeurs de n telles que $P(X = 0)$ est inférieur à 0,01 %.

c. Déterminer les valeurs de n telles que $P(X \geqslant 1)$ est supérieur à 99,5 %.

---

⑧ Une urne contient 7 boules noires et 3 boules blanches. Ces 10 boules sont indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.
Démontrer que $p = 0{,}42$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

b. Exprimer p_n en fonction de n , puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

D'après Baccalauréat Asie 2012

---

⑨ *Une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.*
Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification incomplète sera valorisée.

Une urne contient au total n boules dont cinq sont blanches et les autres noires.
On effectue 10 tirages successifs indépendants en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.

Affirmation : La plus petite valeur de l'entier n , pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule noire sur les 10 tirages est supérieure ou égale à 0,9999, est égale à 13.

D'après Baccalauréat Centres Étrangers 2011