Savoir UTILISER LA CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Ce que je dois savoir faire

- **Justifier l'existence** (**et l'unicité**) **d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ sur un intervalle**

⚠ Lorsqu'un énoncé demande de justifier qu'une solution existe, **il ne vous demande pas de trouver cette solution**.
Il ne faut donc pas chercher à résoudre l'équation... ce que vous ne saurez d'ailleurs généralement pas faire !
La solution n'est alors exprimée et utilisée que sous forme littérale, souvent α .

- Il faut parfois commencer à ce ramener au type $f(x) = k$.

Par exemple : $e^{-x} = x - 1 \Leftrightarrow e^{-x} - x = -1$ et on a alors $\begin{cases} f(x) = e^{-x} - x \text{ à étudier} \\ k = -1 \text{ .} \end{cases}$

ou encore : $e^{-x} = x - 1 \Leftrightarrow e^{-x} - x + 1 = 0$ et on a alors $\begin{cases} f(x) = e^{-x} - x + 1 \text{ à étudier} \\ k = 0 \text{ .} \end{cases}$

- Trois conditions sont attendues clairement :

1$^{\text{ère}}$ condition : f continue sur l'intervalle ...

Remarque : Vous n'aurez que des fonctions usuelles dont la continuité est immédiate.

2$^{\text{ème}}$ condition : f strictement croissante (ou strictement décroissante) sur l'intervalle ...

Remarque : On a généralement étudié les variations de la fonction avant.

Remarque : Vous pouvez grouper les deux premières conditions :
f continue et strictement (dé)croissante sur l'intervalle ...

3$^{\text{ème}}$ condition : k compris entre ... et ...

Les deux valeurs autour de k dépendent du type d'intervalle sur lequel on travaille :

$f(a)$	$f(b)$	si l'intervalle est fermé du type $[\, a \,;\, b \,]$
$f(a)$	$\lim\limits_{x \to b-} f(x)$	si l'intervalle est semi-ouvert du type $[\, a \,;\, b \,[$
$f(a)$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	si l'intervalle est semi-ouvert du type $[\, a \,;\, +\infty \,[$
$\lim\limits_{x \to a+} f(x)$	$f(b)$	si l'intervalle est semi-ouvert du type $]\, a \,;\, b \,]$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$f(b)$	si l'intervalle est semi-ouvert du type $]\, -\infty \,;\, b \,]$
$\lim\limits_{x \to a+} f(x)$	$\lim\limits_{x \to b-} f(x)$	si l'intervalle est ouvert du type $]\, a \,;\, b \,[$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	si l'intervalle est $\mathbb{R}$

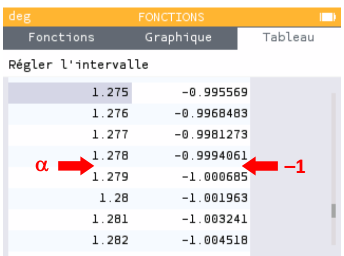
- L'intervalle $[\, a \,;\, b \,]$ peut être donné sous la forme d'un encadrement si on demande de montrer que $a \leqslant \alpha \leqslant b$.

- Si on ne vous demande que l'existence d'au moins une solution, concluez en invoquant
« d'après le théorème des valeurs intermédiaires »
(évitez l'acronyme TVI pratique en cours mais indésirable sur une copie).

- Si on vous demande l'existence d'une solution unique, concluez en invoquant
« d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires » ou « d'après le théorème de la bijection ».

- **Utiliser la calculatrice pour donner un encadrement ou un arrondi d'une solution α**

- *1$^{\text{ère}}$ méthode* : Établir le **tableau de valeurs** en choisissant le bon pas.



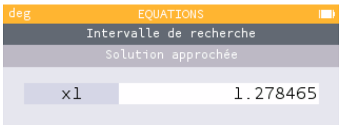
Par exemple ci-contre, pour une équation $f(x) = -1$, on a choisi un pas de 0,01 :
- on cherche la position de -1 dans la colonne des images,
- et on trouve celle de α dans la colonne des antécédents.

On rédige avec $\begin{cases} f(1{,}278) = -0{,}99... \\ f(1{,}279) = -1{,}00... \end{cases}$

qui permet de conclure $\left[\begin{array}{l} \text{l'\textbf{arrondi} à } 10^{-2} : \ \alpha \approx 1{,}28 \\ \text{ou l'\textbf{encadrement} à } 10^{-3} : \ 1{,}278 < \alpha < 1{,}279 \end{array} \right.$

Remarque : On ne peut déduire l'arrondi à 10^{-3} car on ne sait pas entre 1,278 et 1,279 qui est le plus près de α .
Pour cela, il faudrait un tableau avec un pas de 10^{-4}.

- *2ème méthode* : Faire la **résolution approchée de l'équation** qui donne une **valeur à virgule** de α .



Par exemple ci-contre, la valeur permet de conclure l'**arrondi** ou l'**encadrement** à la précision demandée (en général au millième).

Il faut néanmoins justifier en calculant les deux images.

- **Utiliser une solution**
  - *Pour démontrer une égalité fonction de α* :
    partez de la seule chose que vous savez : $f(\alpha) = k$ et transformez-le par équivalences.
  - *Pour une étude de signes* :
    si α est solution de $f(\alpha) = 0$ et si f est strictement (dé)croissante, cela signifie que f change de signe en α .
    On peut alors ajouter α et 0 dans le tableau de variations, qui devient alors tableau de signes :

x	$\dots$ $\dots$
$\dots$	$\dots$
variations de f	$\nearrow$

devient

x	$\dots$	α	$\dots$
$\dots$		$\dots$	
variations de f	$\nearrow$	0	$\nearrow$
signes de f	$-$	0	$+$

Et ce tableau de signes peut déboucher sur un nouveau tableau de variation si les signes de f sont les signes d'une dérivée !

- **Calculer la limite d'une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$**

⚠ La méthode n'est à utiliser que si vous savez déjà que la suite est convergente et admet une limite réelle ℓ .

- Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur un intervalle contenant les termes } u_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell , \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.
  Et comme, par unicité de la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, on en déduit l'équation $f(\ell) = \ell$.
- La solution de l'équation est la limite cherchée.
  Si l'équation possède plusieurs solutions, on trouve la seule qui peut être la limite avec ce qu'on sait de (u_n) .

Remarque : On avait déjà vu ce type d'exercice dans la fiche **S3** dans les cas où u_{n+1} est fabriqué à partir de u_n par opérations successives (par exemple : $u_{n+1} = 2u_n - 3$).
La nouveauté est que u_{n+1} est fabriqué par une fonction qui ne se décompose pas en opérations successives.

Remarques sur les exercices

- Les exercices ① à ⑤ font tous intervenir le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires et demandent de se servir de l'étude d'une 1ère fonction auxiliaire pour en déduire rapidement celle d'une 2ème fonction.
  Et la solution α sera au cœur du problème.
- L'exercice ⑥ concerne deux suites récurrentes dont il faut trouver la limite (et permettra de salutaires révisions).

① **Partie A**

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty [$ par $g(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}$.

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g . Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0 ; +\infty [$.

2. Calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis établir le tableau de variations de la fonction g sur $[0 ; +\infty [$.

3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0 ; +\infty [$.
Déterminer un arrondi de α à 10^{-1} près.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty [$ par $f(x) = x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}) + \mathrm{e} - 2$.

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0 ; +\infty [$.

2. Établir le tableau de signes de $f'(x)$.

3. En déduire les variations de la fonction f sur $[0 ; +\infty [$.

D'après Baccalauréat Nouvelle Calédonie 2012

② On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\dfrac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b. On considère la fonction g définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x)=x^3+x^2+x-1$.
Établir que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.
Donner un encadrement de α au millième.

c. Montrer que, pour tout x de $[\,0\,;+\infty\,[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.
En déduire les variations de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

D'après Baccalauréat Polynésie 2009

---

③ On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x)=x+1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x)=1-x+\mathrm{e}^x$.

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
En déduire le signe de $g(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}g(x)$.

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que $-1<\alpha<0$.

6. **a.** Démontrer que la droite (T) d'équation $y=2x+1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite (T).

D'après Baccalauréat Antilles 2014

---

④ Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g dérivable, définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x)=x^2\,\mathrm{e}^x-1$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction g.

2. Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[\,0\,;+\infty\,[$ tel que $g(\alpha)=0$.
Démontrer que α appartient à l'intervalle $]\,0{,}703\,;0{,}704\,[$.
Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha^2}$.

3. En déduire les signes de $g(x)$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

3. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

4. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m=\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha}$.

5. Justifier que $3{,}43<m<3{,}45$.

D'après Baccalauréat Nouvelle Calédonie 2013

⑤ **Partie 1**

Soit g la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^{x} + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. On note g' la fonction dérivée de g .
Calculer $g'(x)$.

3. Établir le tableau de variations de g .

4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[\,0\,;+\infty\,[$ une unique solution.
On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

c. Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^{x} + 1}$.

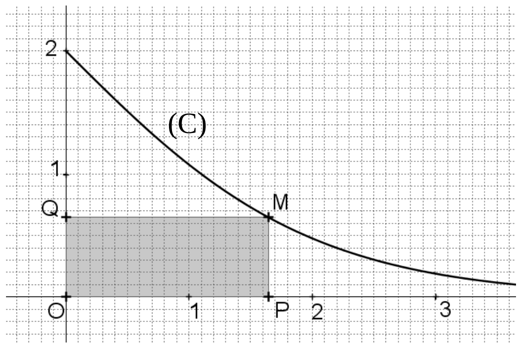
1. Démontrer que pour tout réel $x \in [\,0\,;+\infty\,[$, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^{x} + 1}$.

On note (C) sa courbe représentative, donnée ci-dessous dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:



Pour tout réel x positif ou nul, on note :
- M le point de (C) de coordonnées $(x\,;f(x))$,
- P le point de coordonnées $(x\,;0)$,
- Q le point de coordonnées $(0\,;f(x))$.

Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α et que cette aire vaut alors $4\alpha - 4$.

On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

D'après Baccalauréat Polynésie Septembre 2010

---

⑥ Les exercices **1.** et **2.** sont indépendants.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{-u_n}$.

a. On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.
Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

c. En déduire que (u_n) est convergente vers un réel ℓ .

d. Justifier que ℓ vérifie l'équation $\ell = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell}$.

e. Déterminer la limite de (u_n) .

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et telle que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2\,u_n}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

D'après Baccalauréat S Amérique du Nord 2013