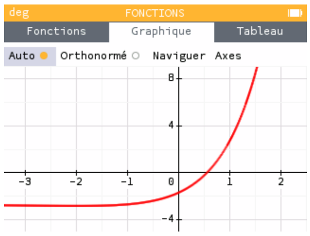
Correction de **FONCTIONS - Fiche 4**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥

① Partie A



N'oubliez pas de tracer la courbe de g sur votre calculatrice pour confirmer vos résultats au fur et à mesure de l'exercice.
Attention, il ne faut considérer que la partie sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

1. g est de la forme $uv - \mathrm{e}$ avec $\begin{cases} u(x) = x+1 \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^x \text{ et } v'(x) = \mathrm{e}^x \,. \end{cases}$

Donc g est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et $g' = u'v + uv'$.

Donc $g'(x) = 1\times\mathrm{e}^x + (x+1)\,\mathrm{e}^x$
$= \mathrm{e}^x\,(x+2)$.

Avez-vous vu que e est une constante additive ?
Elle ne joue aucun rôle dans la dérivée...

2. • $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \end{cases}$ donc, par produit et par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$,
donc $g'(x)$ est du signe de $(x+2)$ donc strictement positif sur $[\,0\,;+\infty\,[$, → $x+2$ s'annule en -2 qui est hors tableau.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
signes de $g'(x)$	$+$
variations de g	$1-\mathrm{e}$ ↗ $+\infty$

$g(0) = (0+1)\,\mathrm{e}^0 - \mathrm{e} = 1 - \mathrm{e} \approx -1{,}7$

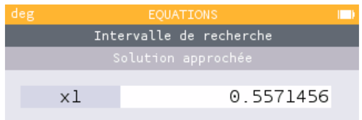
La courbe de ma calculatrice
confirme la croissance,
la limite en $+\infty$
et la valeur de $g(0) \approx -1{,}7$.

3. $\begin{cases} \text{D'après le tableau de variations, } g \text{ est continue et strictement croissante sur } [\,0\,;+\infty\,[\,. \\ 0 \text{ est entre } g(0) = 1-\mathrm{e} = -1{,}71\ldots \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\,. \end{cases}$

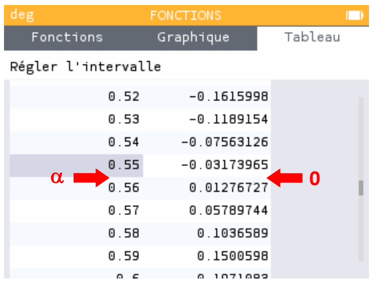
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Pour trouver l'arrondi :

- soit votre calculatrice résout les équations et il suffit d'arrondir la solution fournie :



- soit vous faites un tableau de valeurs.
  Attention, pour un arrondi à 10^{-1}, il faut un pas de 10^{-2}.
  On voit ici que $g(x)$ passe des négatifs aux positifs entre $x = 0{,}55$ et $x = 0{,}56$:



D'après la calculatrice :
$\begin{cases} g(0{,}55) = -0{,}03\ldots \\ g(0{,}56) = 0{,}01\ldots \end{cases}$
donc $\alpha \approx 0{,}6$.

Valeur confirmée sur la
courbe de ma calculatrice.

Partie B

1. Inutile de s'embarrasser avec la constante additive $\mathrm{e} - 2$:

f est de la forme $uv + \mathrm{e} - 2$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e} \text{ et } v'(x) = \mathrm{e}^x \,. \end{cases}$

Donc f est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et $f' = u'v + uv'$.

Donc $f'(x) = 1\times(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}) + x\,\mathrm{e}^x$
$= \mathrm{e}^x\,(1+x) - \mathrm{e}$
$= g(x)$ → Impossible de ne pas voir que c'est $g(x)$!!!

2. Présenter cette question en reprenant le tableau de la partie A et en y ajoutant α permet de voir clairement les choses :

x	0	α	$+\infty$
variations de g	$1-\mathrm{e} \approx -1{,}7$ ↗	0	↗ $+\infty$
signes de $g(x) = f'(x)$	$-$	0	$+$

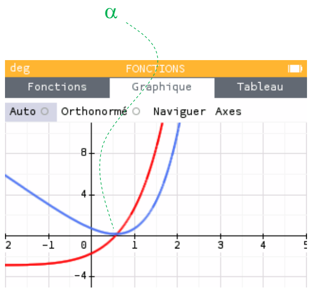
Vous devez voir le rôle de α comme borne séparant les deux intervalles :
$[\,0\,;\alpha\,[$ sur lequel g est négative,
$]\,\alpha\,;+\infty\,[$ sur lequel g est positive.

3. On en déduit :

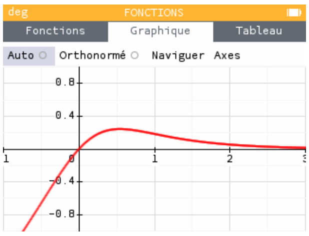
f est décroissante sur $[\,0\,;\,\alpha\,[$ et croissante sur $]\,\alpha\,;+\infty\,[$.

Vous pouviez aussi ajouter une ligne Variations de f au tableau de la **2.** mais la phrase est suffisante.

On peut confirmer cette fin de problème avec la calculatrice en ajoutant le tracé de la fonction f (en bleu) à celui de g (en rouge) :



② Traçons la courbe de f sur notre calculatrice :



a. Cette limite n'est pas facile... Vous devez reconnaître $x\,e^{-x}$ qui est $\dfrac{x}{e^x}$, l'inverse de la "croissances comparées" du cours $\dfrac{e^x}{x}$:

$$\frac{x e^{-x}}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}\,\frac{x}{e^x}$$ → Je mets en évidence la "croissances comparées".

$$\begin{cases} \text{Par croissances comparées, } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1) = +\infty \text{ , donc, par inverse, } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0 \end{cases}$$

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Limite confirmée sur la courbe de ma calculatrice.

On en déduit que la courbe représentative de f admet comme asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = 0$.

b. g est une fonction polynôme dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

$\Delta = 2^2 - 4\times3\times1 = -8 < 0$

donc $g'(x)$ n'a pas de racine et est de signe constant, celui de son coefficient dominant 3 .

On en déduit le tableau de variations de g :

x	0	α	$+\infty$
signes de $g'(x)$		$+$	
variations de g	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$

$g(0) = 0^3 + 0^2 + 0 - 1 = -1$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

g est continue et strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

0 est entre $g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

u de la forme $w_1 w_2$ donc $u' = w_1' w_2 + w_1 w_2'$

c. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x\,e^{-x} \text{ et } u'(x) = 1\times e^{-x} + x\,(-e^{-x}) = (1-x)\,e^{-x} \\ v(x) = x^2 + 1 \text{ et } v'(x) = 2x \text{ .} \end{cases}$

Donc f est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } f'(x) &= \frac{(1-x)\,e^{-x}\,(x^2+1) - x\,e^{-x}\times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{[\,(1-x)(x^2+1) - x\times 2x\,]\,e^{-x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x^2+1-x^3-x-2x^2)\,e^{-x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(-x^3-x^2-x+1)\,e^{-x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-g(x)\,e^{-x}}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$, $\begin{cases} e^{-x} > 0 \\ (x^2+1)^2 > 0 \end{cases}$ donc $f'(x)$ est du signe de $-g(x)$.

On en déduit que f est croissante sur $[\,0\,;\alpha\,[$ et décroissante sur $]\,\alpha\,;+\infty\,[$.

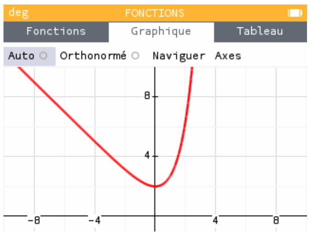
Variations confirmées sur la courbe de ma calculatrice.

On pouvait présenter sous la forme d'un tableau récapitulatif.

x	0	α	$+\infty$
variations de g	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$
signes de $g(x)$	$-$		$+$
signes de $f'(x)$	$+$		$-$
variations de h	$f(0)$ ↗	$f(\alpha)$	↘

Si vous ne le présentez pas sur la copie, rien ne vous empêche de le faire au brouillon pour y voir clair.

③ **1.** *Traçons la courbe de g sur notre calculatrice :*



- g est de la forme $u + v$ avec $\begin{cases} u(x) = 1 - x \text{ et } u'(x) = -1 \\ v(x) = \mathrm{e}^x \text{ et } v'(x) = \mathrm{e}^x . \end{cases}$

  Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = u' + v'$.

  Donc $g'(x) = -1 + \mathrm{e}^x$ → *L'expression n'est pas factorisable...*

- $g'(x) \geqslant 0$ → *... cherchons ses intervalles de positivité par inéquation.*

  $\Leftrightarrow\ -1 + \mathrm{e}^x \geqslant 0$

  $\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^x \geqslant 1$

  $\Leftrightarrow\ x \geqslant 0$

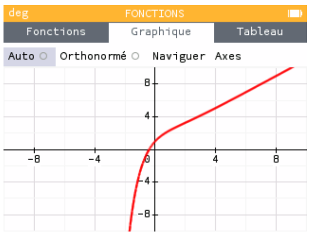
x	$-\infty$	0	$+\infty$
signes de $g'(x)$	$-$	0	$+$
variations de g	↘	2	↗

  $g(0) = 1 - 0 + \mathrm{e}^0$
  $= 2$

  Variations confirmées sur la courbe de ma calculatrice.

- D'après le tableau, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 2$ et donc $g(x) > 0$. → *Vous visualisez que la courbe est au-dessus de 2 .*

2. *Traçons la courbe de f sur notre calculatrice :*



- *En $+\infty$, on doit reconnaître en $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ l'inverse de la "croissances comparées" du cours $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$:*

  $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty \\ \text{par croissances comparées, } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \text{, et donc, par inverse, } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \end{cases}$

  donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \text{ (avec } \mathrm{e}^x \text{ positif)} \end{cases}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$.

  Attention... à ne pas oublier pour justifier le choix fait entre $+\infty$ et $-\infty$.

  De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty$,

  donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

  Limites confirmées sur la courbe de ma calculatrice.

3.

- f est de la forme $u + \dfrac{v}{w}$ avec $\begin{cases} u(x) = x + 1 \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = x \text{ et } v'(x) = 1 \\ w(x) = \mathrm{e}^x \text{ et } w'(x) = \mathrm{e}^x . \end{cases}$ → *Il est plus confortable de décomposer en trois fonctions.*

  Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u' + \dfrac{v'w - vw'}{w^2}$. → *La formule est finalement assez simple...*

  Donc $f'(x) = 1 + \dfrac{1 \times \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}$

  $= 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x (1 - x)}{(\mathrm{e}^x)^2}$

  $= 1 + \dfrac{1 - x}{\mathrm{e}^x}$. → *On pourrait continuer le calcul jusqu'à $\mathrm{e}^{-x}\, g(x)$, mais on peut contourner le problème...*

  Or, $\mathrm{e}^{-x}\, g(x) = \mathrm{e}^{-x} (1 - x + \mathrm{e}^x)$ → *... en partant de $\mathrm{e}^{-x}\, g(x)$ ...*

  $= \dfrac{1 - x + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$

  $= \dfrac{1 - x}{\mathrm{e}^x} + 1 = f'(x)$. → *... pour arriver à la même chose.*

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, → *Débarrassez-vous proprement des facteurs strictement positifs.*
donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ toujours positif, d'après la question **1.**,
donc :

x	$-\infty$ $+\infty$
signes de $f'(x)$	+
variations de f	$-\infty$ ↗ $+\infty$

Variation confirmée sur la courbe de ma calculatrice.

5. $\begin{cases} \text{D'après le tableau, } f \text{ est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}. \\ 0 \text{ est strictement compris entre } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty. \end{cases}$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} f(-1) = -1 + 1 + \dfrac{-1}{e^{-1}} = -e \\ f(0) = 0 + 1 + \dfrac{0}{e^{0}} = 1 \end{cases}$$

donc 0 est compris entre $f(-1)$ et $f(0)$, → *C'est le même principe avec deux nouvelles bornes.*
donc α est compris entre -1 et 0.

6. **a.** $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = e^{-0}\, g(0) = 2 \end{cases}$

donc, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
$\Leftrightarrow y = 2(x - 0) + 1$
$\Leftrightarrow y = 2x + 1$

On obtient bien l'équation de (T).

b. $f(x) - (2x + 1) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x} - 2x - 1$

$= \dfrac{x}{e^x} - x$

$= x\left(\dfrac{1}{e^x} - 1\right)$ → *Je factorise.*

$\dfrac{1}{e^x} - 1 \geqslant 0$ → *Je cherche quand* $\dfrac{1}{e^x} - 1$ *est positif...*

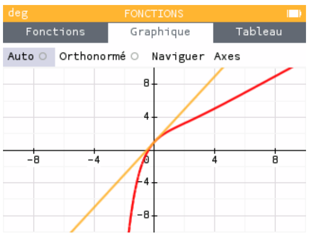
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{e^x} \geqslant 1$

$\Leftrightarrow e^x \leqslant 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}+*$

$\Leftrightarrow x \leqslant 0$ → *... c'est quand* $x \leqslant 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signes de x	$-$	0	+
signes de $e^x - 1$	+	0	$-$
signes de $f(x) - (2x + 1)$	$-$	0	$-$
positions relatives	$\mathscr{C}$ en-dessous de (T)		$\mathscr{C}$ en-dessous de (T)

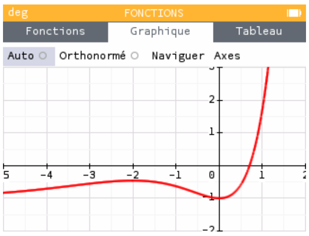
On peut confirmer ces positions avec la calculatrice en ajoutant le tracé de la fonction $x \mapsto 2x + 1$ *(en jaune) à celui de* f *(en rouge) :*



④ **Partie A**

Traçons la courbe de g sur notre calculatrice :

Attention, il ne faut considérer que la partie sur $[\,0\,;+\infty\,[$.



1. • g est de la forme $uv-1$ avec $\begin{cases} u(x)=x^2 \text{ et } u'(x)=2x \\ v(x)=e^x \text{ et } v'(x)=e^x \,. \end{cases}$

Donc g est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et $g'=u'v+uv'$. → La constante additive disparaît à la dérivation.

Donc $g'(x)=2x\,e^x+x^2\,e^x$
$\qquad = x\,e^x\,(\,2+x\,)$ → Je factorise au maximum (éviter de s'arrêter à $e^x\,(\,2x+x^2\,)$).

• Pour tout $x\in[\,0\,;+\infty\,[$, $\begin{cases} e^x>0 \\ x\geqslant 0 \end{cases}$

donc $g'(x)$ est du signe de $2+x$.

Or : $2+x>0 \iff x>-2$.

Donc $g'(x)>0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

et donc g est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Croissance confirmée sur la courbe de ma calculatrice.

On peut conclure cette question sans tableau de variations, il n'est pas explicitement demandé.

2. • D'une part, g est continue et strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

D'autre part :

$g(0)=0^2\,e^0-1=-1$

et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty \end{cases}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Donc, 0 est strictement compris entre $g(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$,

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution réelle α sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

• $\begin{cases} g(0{,}703)=0{,}703^2\,e^{0{,}703}-1=-0{,}0017\ldots \\ g(0{,}704)=0{,}704^2\,e^{0{,}704}-1=0{,}0020\ldots \end{cases}$

donc 0 est compris entre $g(0{,}703)$ et $g(0{,}704)$,

donc α est compris entre $0{,}703$ et $0{,}704$.

• $g(\alpha)=0$

$\iff \alpha^2\,e^\alpha-1=0$

$\iff \alpha^2\,e^\alpha=1$

$\iff e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha^2}$

L'égalité demandée dépend de α .
Or, que sait-on de précis sur α ? Uniquement qu'il est solution de $g(x)=0$ et donc que $g(\alpha)=0$.

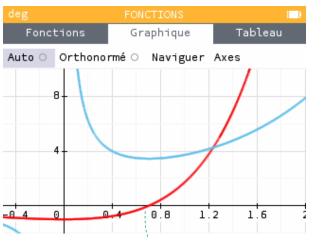
3. g est négative sur $[\,0\,;\alpha\,[$ et positive sur $]\,\alpha\,;+\infty\,[$.

On visualise bien mieux avec un tableau de variations :

x	0		α		$+\infty$
variations de g	-1	↗	0	↗	$+\infty$

Partie B

Ajoutons la courbe de f (en bleu) sur notre calculatrice :



α

1. • $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0 \end{cases}$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

• $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} e^x=1 \\ \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x}=+\infty \end{cases}$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$.

Limites confirmées sur la courbe de ma calculatrice.

2. • f est de la forme $u + v$ avec $\begin{cases} u(x) = e^x \text{ et } u'(x) = e^x \\ v(x) = \frac{1}{x} \text{ et } v'(x) = \frac{-1}{x^2}. \end{cases}$

Donc f est dérivable sur $[\,0\,; +\infty\,[$ et $f' = u' + v'$.

Donc $f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$

$= \frac{x^2 e^x - 1}{x^2}$

$= \frac{g(x)}{x^2}$

3. Pour tout $x \in \,]\,0\,; +\infty\,[$, $x^2 > 0$,
donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$,
donc :

x	0		α		$+\infty$
signes de $g(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$e^\alpha + \frac{1}{\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\alpha) = e^\alpha + \frac{1}{\alpha}$

Variations confirmées sur la courbe de ma calculatrice.

4. D'après la question précédente, le minimum de f est $m = e^\alpha + \frac{1}{\alpha}$.

Or, d'après la question **2.** de la Partie A, $e^\alpha = \frac{1}{\alpha^2}$.

On en déduit que $m = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}$.

5. D'après la question **2.** de la Partie A : $0{,}703 < \alpha < 0{,}704$.

On en déduit d'une part : $\frac{1}{0{,}703} > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{0{,}704}$, car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Et d'autre part :

$0{,}703^2 < \alpha^2 < 0{,}704^2$,

et donc : $\frac{1}{0{,}703^2} > \frac{1}{\alpha^2} > \frac{1}{0{,}704^2}$.

Donc, par somme :

$$\frac{1}{0{,}704^2} + \frac{1}{0{,}704} < \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0{,}703^2} + \frac{1}{0{,}703}$$

donc $3{,}438\ldots < \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} < 3{,}445\ldots$

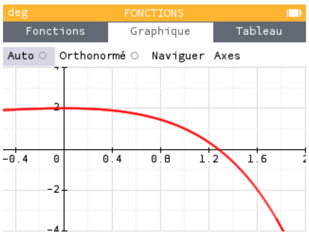
et donc $3{,}43 < m < 3{,}45$.

---

⑤ **Partie 1**

Traçons la courbe de g sur notre calculatrice :

Il ne faut considérer que la partie sur $[\,0\,; +\infty\,[$.



$-\infty$ $+\infty$ $(-\infty) \times (+\infty)$ fait $-\infty$ et le $+1$ n'y change rien

1. On voit d'abord au brouillon si c'est une forme indéterminée : $(1 - x)\,e^x + 1$.

Non, ce n'en est pas une, aucune raison de transformer l'expression :

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$ donc, par produit et par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

Limite confirmée sur la courbe de ma calculatrice.

2. g est de la forme $uv + 1$ avec $\begin{cases} u(x) = 1 - x \text{ et } u'(x) = -1 \\ v(x) = e^x \text{ et } v'(x) = e^x. \end{cases}$

Donc g est dérivable sur $[\,0\,; +\infty\,[$ et $g' = u'v + uv'$.

Donc $g'(x) = -1\, e^x + (1 - x)\, e^x$

$= -x\, e^x$

3. Pour tout $x \in [\ 0\ ; +\infty\ [$, $e^{x} > 0$

donc $g'(x)$ est du signe de $-x$, donc nul en 0 et négatif sur $]\ 0\ ; +\infty\ [$.

x	0		$+\infty$
signes de $g'(x)$	0	$-$	
variations de g	2	$\searrow$	$-\infty$

$g(0) = (\ 1 - 0\ )\,e^{0} + 1$
$= 2$

Décroissance confirmée sur la courbe de ma calculatrice.

4. **a.** Question très classique, qu'on repère à son "unique solution", à la forme de l'équation et à la position de la question juste après le tableau.

$\begin{cases} \text{D'après le tableau de variations, } g \text{ est continue et strictement décroissante sur } [\ 0\ ; +\infty\ [\text{ .} \\ 0 \text{ est compris entre } g(0) = 2 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \text{ .} \end{cases}$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[\ 0\ ; +\infty\ [$.

b. D'après la calculatrice :

$\begin{cases} g(1{,}27) = 0{,}03... \\ g(1{,}28) = -0{,}007... \end{cases}$

donc $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

c. Partons du fait que α est solution de $g(x) = 0$ et donc que $g(\alpha) = 0$.

$g(\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow\ (\ 1 - \alpha\ )\,e^{\alpha} + 1 = 0$
$\Leftrightarrow\ (\ 1 - \alpha\ )\,e^{\alpha} = -1$
$\Leftrightarrow\ e^{\alpha} = \dfrac{-1}{1 - \alpha}$
$\Leftrightarrow\ e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

5. Si vous ne voyez pas bien le rôle de α , faites un nouveau tableau en le plaçant dedans :

x	0		α		$+\infty$
variations de g	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

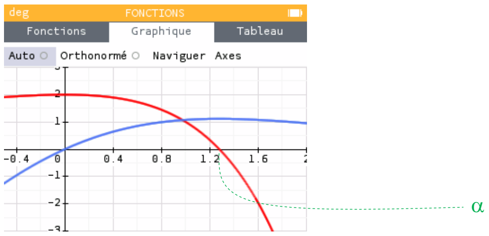
Signes confirmés sur la courbe de ma calculatrice.

$g(x)$ est positif sur $[\ 0\ ; \alpha\ [$ et négatif sur $]\ \alpha\ ; +\infty\ [$.

Partie 2

Ajoutons la courbe de A (en bleu) sur notre calculatrice :

On ne considère toujours que la partie sur $[\ 0\ ; +\infty\ [$.



1. On nous dit que $A'(x)$ va avoir le même signe que $g(x)$.

On peut s'attendre à trouver $A'(x) = g(x) \times$ quelque chose de positif , ou alors $\dfrac{g(x)}{\text{quelque chose de positif}}$.

Au pire, avec un facteur positif en plus...

A est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 4x \text{ et } u'(x) = 4 \\ v(x) = e^{x} + 1 \text{ et } v'(x) = e^{x} \text{ .} \end{cases}$

Donc A est dérivable sur $[\ 0\ ; +\infty\ [$ et $A' = \dfrac{u'v - uv'}{v^{2}}$.

Donc $A'(x) = \dfrac{4\,(\ e^{x} + 1\ ) - 4x\,e^{x}}{(\ e^{x} + 1\ )^{2}}$

$= \dfrac{4\,e^{x} + 4 - 4x\,e^{x}}{(\ e^{x} + 1\ )^{2}}$ → Où peut bien être $g(x)$? Certainement dans le numérateur...

$= \dfrac{4\,(\ e^{x} - x\,e^{x} + 1\ )}{(\ e^{x} + 1\ )^{2}}$ → Factorisons par ce 4 gênant.

$= \dfrac{4\,(\ (\ 1 - x\ )\,e^{x} + 1\ )}{(\ e^{x} + 1\ )^{2}}$ → On repère le $+\ 1$ et il reste juste à factoriser par e^{x} pour voir apparaître $g(x)$, comme prévu.

$= \dfrac{4\,g(x)}{(\ e^{x} + 1\ )^{2}}$ → Et $g(x)$ est très bien entouré !

$4 > 0$ et $(\ e^{x} + 1\ )^{2} > 0$ pour tout $x \in [\ 0\ ; +\infty\ [$
donc $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

2. Les signes de $g(x)$ ont été traités dans la dernière question de la Partie 1, il suffit d'aller les chercher.
Et de faire attention... les <u>signes</u> de $g(x)$, donc de $A'(x)$, donnent une information sur les <u>variations</u> de A .

Variations confirmées sur la courbe de ma calculatrice.

D'après la question **5.** de la Partie 1, A est croissante sur $[\ 0\ ; \alpha\ [$ et décroissante sur $]\ \alpha\ ; +\infty\ [$.

Partie 3

L'aire du rectangle $OPMQ$ vaut $OP \times OQ = x \times f(x) = x\dfrac{4}{e^x+1} = A(x)$. → L'aire d'un rectangle... longueur × largeur , ça vous rappelle quelque chose ?

D'après la question **2.** de la partie 2, A atteint son maximum en $x = \alpha$.

Cette aire vaut alors :

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{4\alpha}{e^{\alpha}+1} \\ &= \frac{4\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1} \quad \text{d'après la question } \textbf{4. c.} \text{ de la partie 1} \\ &= \frac{4\alpha}{\dfrac{1+\alpha-1}{\alpha-1}} \\ &= \frac{4\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}} \\ &= 4\alpha\frac{\alpha-1}{\alpha} \\ &= 4(\alpha-1) \\ &= 4\alpha-4 \end{aligned}$$

→ Il faut bien que e^{α} disparaisse !

---

⑥ **1.** **a.** f est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} \text{ et } v'(x) = -e^{-x}. \end{cases}$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$.

Donc $f'(x) = 1\,e^{-x} + x(-e^{-x})$
$= (1-x)\,e^{-x}$

Pour tout $x \in [0;1]$, $\begin{cases} 1-x \geqslant 0 \\ e^{-x} > 0 \end{cases}$ et donc $f'(x) \geqslant 0$.

On en déduit que f est croissante sur $[0;1]$.

b. On pose $\mathscr{P}(n)$: $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$, l'encadrement à démontrer.

- Initialisation :

  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = u_0\,e^{-u_0} = 1\,e^{-1} = 0{,}36... \end{cases}$ donc $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$,

  donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

  Supposons $\mathscr{P}(n)$: $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.
  Alors :

  $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ par hypothèse de récurrence

  donc $f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ car la fonction f est croissante sur $[0;1]$

  donc $0\,e^{-0} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1\,e^{-1}$

  donc $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ car $e^{-1} = 0{,}36... < 1$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

c. D'après **b.**, (u_n) est décroissante et minorée par 0,
donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

d. $\begin{cases} f \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \end{cases}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\ell)$

De plus, par unicité de la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$,

on en déduit que $f(\ell) = \ell$.

e. $f(\ell) = \ell$

$\Leftrightarrow \ell\,e^{-\ell} = \ell$ → Attention à ne pas simplifier par ℓ car on ne sait pas si ℓ est non nul.

$\Leftrightarrow \ell\,e^{-\ell} - \ell = 0$

$\Leftrightarrow \ell\,(e^{-\ell} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow\ \ell = 0$ ou $e^{-\ell} - 1 = 0$
$\Leftrightarrow\ \ell = 0$ ou $e^{-\ell} = 1$
$\Leftrightarrow\ \ell = 0$ ou $\ell = 0$
$\Leftrightarrow\ \ell = 0$

Donc la limite de (u_n) est 0 .

---

2. **a.** On pose $\mathscr{P}(n)$: $0 < u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, l'encadrement à démontrer.

- Initialisation :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \sqrt{2u_0} = \sqrt{2} = 1{,}4... \end{cases}$ donc $0 < u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$,

donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $0 < u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.
Alors :

$0 < u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ par hypothèse de récurrence

donc $0 < 2u_n \leqslant 2u_{n+1} \leqslant 4$

donc $\sqrt{0} < \sqrt{2u_n} \leqslant \sqrt{2u_{n+1}} \leqslant \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$

donc $0 < u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

b. D'après **a.**, $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
donc (u_n) est croissante.

c.
- D'après **a.** et **b.**, (u_n) est croissante et majorée par 2,
donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente vers un réel ℓ .

- $\begin{cases} x \mapsto \sqrt{2x} \text{ continue sur } [\,0\,;+\infty\,[\\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \end{cases}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2u_n} = \sqrt{2\ell}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \sqrt{2\ell}$

De plus, par unicité de la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$,

on en déduit que $\sqrt{2\ell} = \ell$
$\Leftrightarrow\ 2\ell = \ell^2$ car ℓ positif
$\Leftrightarrow\ \ell^2 - 2\ell = 0$
$\Leftrightarrow\ \ell(\ell - 2) = 0$
$\Leftrightarrow\ \ell = 0$ ou $\ell = 2$

Comme (u_n) est croissante de premier terme 1 (ou aussi d'après **a.**, $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), elle ne peut converger vers 0 .
Donc la limite de (u_n) est 2 .