Savoir DÉMONTRER DANS L'ESPACE AVEC DES VECTEURS

Comme toutes les démonstrations mathématiques,
vous devrez partir des *données*
et finir sur la *conclusion* à démontrer :

N'hésitez pas à combiner
- la descente par déduction de conséquence
- la remontée à reculons par abduction de cause

et donc à écrire tout en bas la conclusion que vous voulez atteindre.

données
donc ...
⋮
donc ...
donc conclusion

descente déductive

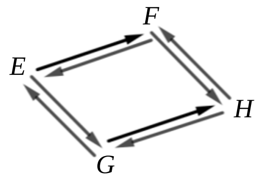
remontée abductive

Une spécificité des démonstrations avec les vecteurs est qu'on part souvent d'un vecteur qu'on transforme.
On en déduit une <u>égalité vectorielle</u> qui permet de déduire la conclusion :

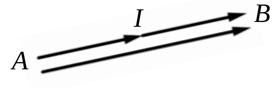
$\overrightarrow{\bullet\bullet} = \dots$
⋮
$= \dots$
donc conclusion

<u>Ce que je dois savoir faire</u>

- "Descendre" en **déduisant une égalité vectorielle d'une donnée**
  - Si l'énoncé donne une <u>égalité vectorielle</u> $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$,
    vous pouvez en déduire l'une des trois égalités associées $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{HG}$
    ou $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{FH}$ ou $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{HF}$.



  - Si l'énoncé donne un <u>milieu</u> I de $[AB]$,
    vous pouvez en déduire les égalités $\begin{cases} \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} \end{cases}$ ou toute égalité associée.

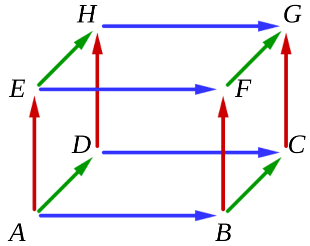


  - Si l'énoncé donne un <u>parallélogramme</u> $ABCD$,
    vous pouvez en déduire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (attention à l'ordre des lettres) ou l'une des trois égalités associées.

    Cela reste valable bien sûr avec $ABCD$ losange, rectangle, carré, et donc face d'un cube ou d'un pavé droit.

  - Si l'énoncé donne un <u>pavé droit</u> $ABCDEFGH$ (dit aussi parallélépipède rectangle),
    vous pouvez en déduire les égalités des vecteurs portés par les arêtes parallèles
    $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} \\ \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH} \end{cases}$

    Cela reste valable bien sûr avec $ABCDEFGH$ cube.



- "Remonter" en **trouvant une égalité vectorielle qui permettra de déduire la conclusion à démontrer**
  - Pour conclure par un <u>milieu</u> I de $[AB]$, l'étape précédente sera une des égalités vectorielles vues ci-dessus.
  - Pour conclure par un <u>parallélogramme</u> $ABCD$, l'étape précédente sera une des égalités vectorielles vues ci-dessus.
  - Pour conclure par un <u>parallélisme</u> $(AB) \,//\, (CD)$, l'étape précédente sera $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires
    et l'étape antéprécédente sera une égalité $\overrightarrow{AB} = \dots\ \overrightarrow{CD}$.
  - Pour conclure par un <u>alignement</u> de A , B et C , l'étape précédente sera $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires
    et l'étape antéprécédente sera une égalité $\overrightarrow{AB} = \dots\ \overrightarrow{AC}$.
  - Pour conclure par une <u>coplanarité</u> de A , B , C et D , l'étape précédente sera $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ coplanaires
    et l'étape antéprécédente sera une égalité $\overrightarrow{AD} = \dots\ \overrightarrow{AB} + \dots\ \overrightarrow{AC}$.

    <u>Remarque</u> : Retenez aussi qu'une <u>coplanarité</u> de points pourra venir du fait qu'ils sont sur <u>deux droites coplanaires</u> (parallèles ou sécantes).

- "Descendre" en **modifiant un vecteur de départ**
  - Méthode très classique qui nécessite de savoir quel <u>vecteur de départ</u> choisir pour obtenir une égalité vectorielle qui permettra de déduire la conclusion à démontrer (voir ci-dessus).
  - En le remplaçant par un vecteur égal, grâce à un milieu, un parallélogramme, un pavé droit.

- En utilisant la relation de Chasles pour faire apparaître un point ou un vecteur utile :
  un vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être remplacé par $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ si le point M est utile pour la suite
  ou si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est utile pour la suite.

  Remarque : Ne pas s'inquiéter du vecteur $\overrightarrow{MB}$ créé collatéralement, il s'arrangera avec d'autres...

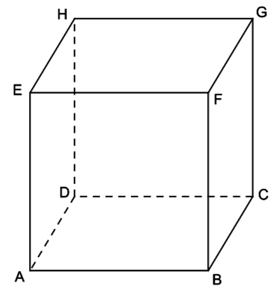
  Remarque : On peut décomposer en une somme d'autant de vecteurs qu'on veut.
  En particulier, on peut utiliser des vecteurs portés par les arêtes, qui seront faciles à remplacer.
- En utilisant la relation de Chasles dans l'autre sens pour réduire une somme : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

---

① On donne un cube $ABCDEFGH$ et les points M et N définis par $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{GB}$ et par $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BH}$.

a. Démontrer que B est le milieu de $[FM]$.

b. Démontrer que H est le milieu de $[GN]$.

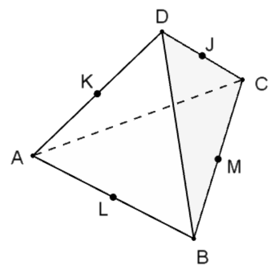


---

② Dans un tétraèdre $ABCD$, on pose J , K , L et M les milieux respectifs de $[CD]$, $[AD]$, $[AB]$ et $[BC]$.

a. Démontrer que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{JM}$.

b. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $JKLM$?

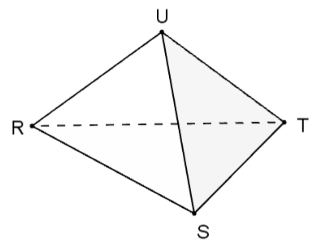


---

③ Dans un tétraèdre $RSTU$, on pose les points E , F , G et H définis par
$\overrightarrow{SE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SU}$; $\overrightarrow{SF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SR}$; $\overrightarrow{TG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{TU}$; $\overrightarrow{TH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{TR}$.

a. Démontrer que (EF) et (GH) sont parallèles.

b. En déduire que les points E , F , G et H sont coplanaires.

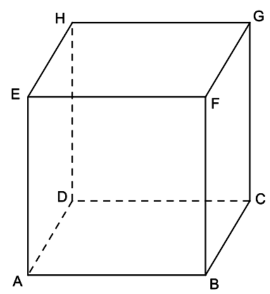


---

④ Dans un cube $ABCDEFGH$, on définit le point O milieu de $[AG]$.

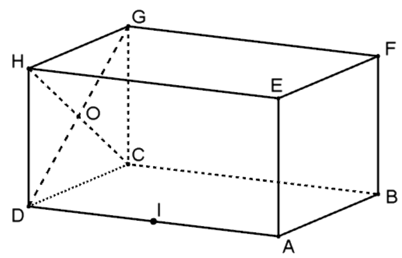
a. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

b. En déduire que O est le milieu de $[HB]$.



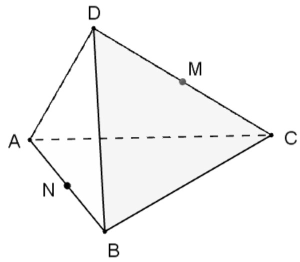
---

⑤ Soit un pavé droit $ABCDEFGH$.
On définit les points O centre de la face $CDHG$ et I milieu de $[AD]$.
Démontrer que les points O , I , G et A sont coplanaires.



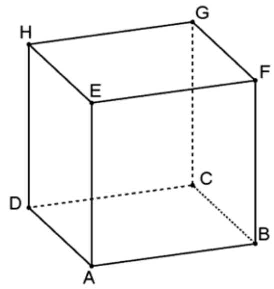
⑥ Dans un tétraèdre $ABCD$, on pose M et N les milieux respectifs de $[CD]$ et $[AB]$.
Soit alors le point O milieu de $[MN]$.

Démontrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.



⑦ Étant donné un cube $ABCDEFGH$, on définit le point M par $\overrightarrow{HM} = 3\,\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CE}$.

Démontrer que M appartient au plan $(BCGF)$.

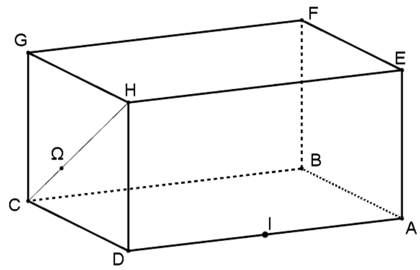


⑧ On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ dans lequel on définit les points I milieu de $[AD]$ et Ω tel que $\overrightarrow{H\Omega} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{HC}$.

a. Justifier que que $2\,\overrightarrow{EI} = 2\,\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{EH}$.

b. Justifier que que $2\,\overrightarrow{EI} + 2\,\overrightarrow{EG} = 3\,\overrightarrow{EH} + 2\,\overrightarrow{HC}$.

c. En déduire que les points E, I, G et Ω sont coplanaires.



⑨ Dans le tétraèdre $ABCD$ ci-contre, on définit le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
Le centre de gravité G du triangle BCD est défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

a. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ suivant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b. En déduire que les points A, G et E sont alignés.