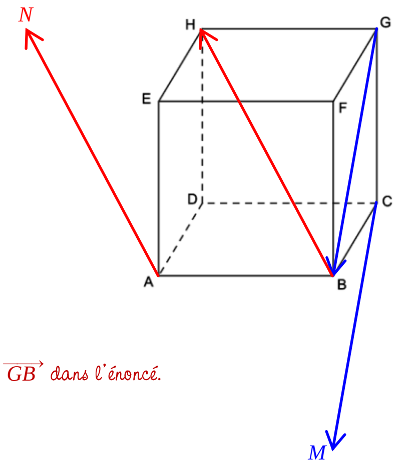
Correction de **GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE - Fiche 1**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

① **a.** Méthode 1 : transformation d'une **égalité vectorielle de départ**



$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{GB}$

donc $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{GC}$ → Égalité associée dans le parallélogramme $BGCM$.

donc $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{FB}$ → Remplacement de $\overrightarrow{GC}$ par $\overrightarrow{FB}$ dans le cube.

donc B milieu de $[FM]$.

Méthode 2 : transformation d'un **vecteur de départ**

Pour finir la démonstration par B milieu de $[FM]$, ce serait bien d'avoir $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{FB}$.

Partons de $\overrightarrow{BM}$ et modifions-le :

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$ → Relation de Chasles pour faire apparaître le point C.

$= \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GB}$ → Remplacement de $\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{FG}$ dans le cube et de $\overrightarrow{CM}$ par $\overrightarrow{GB}$ dans l'énoncé.

$= \overrightarrow{FB}$ → J'utilise la relation de Chasles pour réduire.

donc B milieu de $[FM]$.

b. Méthode 1 : transformation d'une **égalité vectorielle de départ**

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BH}$

donc $\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{BA}$ → Égalité associée dans le parallélogramme $ABHN$.

donc $\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{GH}$ → Remplacement de $\overrightarrow{BA}$ par $\overrightarrow{GH}$ dans le cube.

donc H milieu de $[GN]$.

Méthode 2 : transformation d'un **vecteur de départ**

Pour finir la démonstration par H milieu de $[GN]$, ce serait bien d'avoir $\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{GH}$.

Partons de $\overrightarrow{HN}$ et modifions-le :

$\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN}$ → Relation de Chasles pour décomposer en trois vecteurs pour longer les arêtes et faire apparaître $\overrightarrow{AN}$.

$= \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH}$ → Remplacement de $\overrightarrow{HD}$ par $\overrightarrow{GC}$ et de $\overrightarrow{DA}$ par $\overrightarrow{CB}$ dans le cube et de $\overrightarrow{AN}$ par $\overrightarrow{BH}$ dans l'énoncé.

$= \overrightarrow{GH}$ → J'utilise la relation de Chasles pour réduire.

donc H milieu de $[GN]$.

② **a.** Méthode : transformation d'un **vecteur de départ**

Partons de $\overrightarrow{KL}$ et modifions-le :

$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL}$ → Relation de Chasles pour faire apparaître le point A.

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ car K et L milieux respectifs de $[AD]$ et $[AB]$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$ → Je factorise.

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ → J'utilise la relation de Chasles pour réduire.

Nous avons quitté la face ABD pour nous retrouver sur l'arête $[DB]$.

Basculons sur la face BCD.

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB})$ → Relation de Chasles pour faire apparaître le point C.

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ → Je distribue.

$= \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CM}$ car J et M milieux respectifs de $[CD]$ et $[BC]$

$= \overrightarrow{JM}$ → J'utilise la relation de Chasles pour réduire.

b. $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{JM}$

donc $JKLM$ parallélogramme.

③ **a.** Pour finir la démonstration par (EF) et (GH) parallèles , il faut que l'étape précédente soit $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ colinéaires.
Pour cela, il faut arriver à $\overrightarrow{EF} = \dots\ \overrightarrow{GH}$ ou à $\overrightarrow{GH} = \dots\ \overrightarrow{EF}$.

Partons de $\overrightarrow{EF}$ et modifions-le :

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ES} + \overrightarrow{SF}$ → Relation de Chasles pour faire apparaître le point S .

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{US} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SR}$ → J'utilise les égalités de l'énoncé (en transformant $\overrightarrow{SE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SU}$ en $\overrightarrow{ES} = \frac{1}{4}\overrightarrow{US}$).

$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{US} + \overrightarrow{SR})$ → Je factorise.

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{UR}$ → J'utilise la relation de Chasles pour réduire.

Nous avons quitté la face RSU pour nous retrouver sur l'arête $[UR]$.
Basculons sur la face RTU .

$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{UT} + \overrightarrow{TR})$ → Relation de Chasles pour faire apparaître le point T .

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}\overrightarrow{GT} + \frac{3}{2}\overrightarrow{TH})$ → J'utilise les égalités de l'énoncé (en transformant $\overrightarrow{TG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{TU}$ en $\overrightarrow{GT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{UT}$ puis en $\overrightarrow{UT} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GT}$).

$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{2}(\overrightarrow{GT} + \overrightarrow{TH})$ → Je factorise.

$= \frac{3}{8}\overrightarrow{GH}$ → J'ai fini !

donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ colinéaires
donc (EF) et (GH) parallèles.

b. (EF) et (GH) parallèles.
donc (EF) et (GH) coplanaires
donc E , F , G et H coplanaires.

---

④ **a.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$ → Relation de Chasles pour longer les arêtes.

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ → Égalités des vecteurs du cube.

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$
$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

b. Pour finir la démonstration par O milieu de $[HB]$, on peut avoir plusieurs égalités vectorielles comme étapes précédentes.
On peut essayer d'arriver à $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OH}$ ou à $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$.

La question a. permet de penser que ce sera plutôt la deuxième égalité.

Partons de $\overrightarrow{BO}$ et modifions-le :

$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO}$ → Relation de Chasles pour faire apparaître le vecteur $\overrightarrow{AO}$.

$= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$ car O milieu de $[AG]$ → J'utilise la donnée.

$= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$ → J'utilise la question **a.** .

$= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ → Je développe et je transforme $\overrightarrow{BA}$ en $-\overrightarrow{AB}$.

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ → Je réduis mes $\overrightarrow{AB}$.

$= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$ → Je factorise.

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$ → J'utilise la question **a.** .

donc O milieu de $[HB]$.

---

⑤ On va utiliser la même technique que dans l'exercice ②.

$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DI}$ → Relation de Chasles pour faire apparaître le point D .

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{GD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ car O et I milieux respectifs de $[DG]$ et $[AD]$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DA})$ → Je factorise.

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ → J'utilise la relation de Chasles pour réduire.

donc $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont colinéaires
donc (OI) et (GA) sont parallèles et donc coplanaires
donc O , I , G et A sont coplanaires.

⑥ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{JD}$

$= 2\overrightarrow{OM}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM})+2\overrightarrow{ON}+(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CN})$ car M et N milieux respectifs de $[CD]$ et $[AB]$

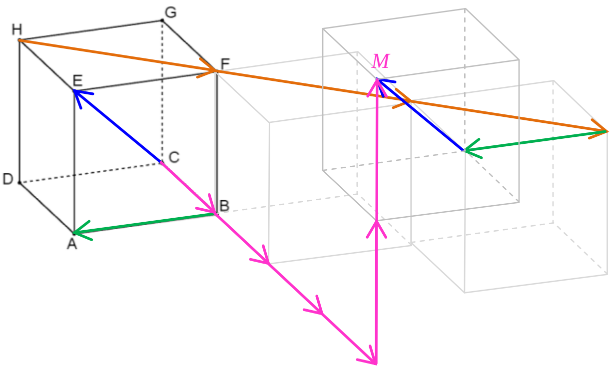
$= 2(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})$

$= 2(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MO})$ car O milieu de $[MN]$

$= 2\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

---

⑦ *On peut visualiser la chose en ajoutant des cubes : pour arriver à M, on se déplace de deux cubes vers la droite puis on revient de deux cubes vers la gauche.*
On est bien dans le plan de la face $BCGF$.
On peut même voir que $\overrightarrow{CM} = 4\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CG}$.



Partons de $\overrightarrow{CM}$:

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HM}$ → *Relation de Chasles pour longer les arêtes et faire apparaître le vecteur $\overrightarrow{HM}$.*

$= \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}+3(\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CE})$

$= \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}+3(\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF})+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HE}$ → *Ça peut impressionner mais je n'ai que des arêtes...*

$= \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}-3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CB}$ → *Je ramène tout à C.*

$= \cancel{\overrightarrow{CD}}+\overrightarrow{CG}\cancel{-3\overrightarrow{CD}}+3\overrightarrow{CB}+\cancel{\overrightarrow{CD}}+\cancel{\overrightarrow{CD}}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CB}$

$= 2\overrightarrow{CG}+4\overrightarrow{CB}$ → *Tout vient à point à qui sait attendre.*

donc $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont coplanaires
donc C, G, B et M sont coplanaires
donc $M \in (BCGF)$.

---

⑧ **a.** $2\overrightarrow{EI} = 2(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AI})$ → *Relation de Chasles pour faire apparaître le point A.*

$= 2\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{AI}$

$= 2\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}$ car I milieu de $[AD]$ → *J'utilise l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{HD}$ portés par des arêtes parallèles.*

$= 2\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{EH}$ → *J'utilise l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EH}$ portés par des arêtes parallèles.*

b. $2\overrightarrow{EI}+2\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{EH}+2\overrightarrow{EG}$ → *D'après la question précédente.*

$= 2\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{EH}+2(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HG})$

$= 2\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{EH}+2\overrightarrow{EH}+2\overrightarrow{HG}$

$= 3\overrightarrow{EH}+2(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HG})$

$= 3\overrightarrow{EH}+2\overrightarrow{HC}$ car $HDCG$ est un parallélogramme (*puisque rectangle*) dans le pavé droit $ABCDEFGH$

c. $2\overrightarrow{EI}+2\overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{EH}+2\overrightarrow{HC}$ → *D'après la question précédente.*

$= 3\overrightarrow{EH}+2\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{H\Omega}\right)$ car $\overrightarrow{H\Omega} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HC}$

$= 3\overrightarrow{EH}+3\overrightarrow{H\Omega}$

$= 3(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{H\Omega})$

$= 3\overrightarrow{E\Omega}$

donc $\overrightarrow{E\Omega} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EG}$

donc $\overrightarrow{E\Omega}$, $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont coplanaires
donc les points E, I, G et Ω sont coplanaires.

---

⑨ **a.** $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ → *Pas facile de partir de $\overrightarrow{AG} = \ldots$, il vaut mieux partir de l'égalité donnée...*

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}) = \vec{0}$ → *... et faire apparaître les quatre vecteurs dont on a besoin.*

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{GA}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

b. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires
donc les points A, G et E sont alignés.