Savoir DÉTERMINER ET UTILISER DES REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES DE DROITES

Ce que je dois savoir faire

- **Déterminer un système d'équations paramétriques** (ou **représentation paramétrique**) **d'une droite**

  - Si la droite passe par $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$,

    alors elle a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=\alpha t+x_A \\ y=\beta t+y_A \\ z=\gamma t+z_A \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

  Remarque : N'oubliez pas de préciser la nature du paramètre « avec $t\in\mathbb{R}$ ».

  Remarque : Si vous avez plusieurs droites à traiter, prenez un paramètre différent pour chaque droite.

  Remarque : Ne confondez pas les coordonnées de $\vec{u}$ qui multiplient t et celles de A qui s'ajoutent.

  Remarque : Pour une droite (RS), prenez R ou S comme point (peu importe) et $\overrightarrow{RS}$ comme vecteur directeur.
  De plus, si des fractions apparaissent dans les coordonnées du vecteur, prenez un multiple pour avoir des entiers.
  Par exemple, si $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}-1/2\\ 5\\ 1/4\end{pmatrix}$, choisissez plutôt $4\,\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}-2\\ 20\\ 1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

  Remarque : La représentation paramétrique d'une droite joue le même rôle qu'une équation cartésienne.
  Elle est équivalente à l'appartenance d'un point $M\,(x\,;y\,;z)$ à la droite.
  En particulier, les points de la droite sont les points de coordonnées $(\alpha t+x_A\,;\beta t+y_A\,;\gamma t+z_A)$.

Dans la suite, on considère les droites $(d):\begin{cases} x=at+b \\ y=ct+d \\ z=et+f \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$, et $(d'):\begin{cases} x=gs+h \\ y=is+j \\ z=ks+l \end{cases}$ avec $s\in\mathbb{R}$.

- Utiliser une représentation paramétrique pour **déterminer si un point donné appartient à une droite**

  On teste les coordonnées du point dans le système.
  Mais en remplaçant x, y et z par les coordonnées, on obtient un système de 3 équations à 1 inconnue t :
  - soit les trois équations donnent la même valeur de t et alors le système est vérifié et le point est sur la droite,
  - soit les trois équations ne donnent pas la même valeur de t et alors le système n'est pas vérifié et le point n'est pas sur la droite.

- Utiliser une représentation paramétrique pour **trouver un point d'une droite**

  - Pour trouver un point quelconque d'une droite, donnez une valeur de votre choix à t et les valeurs de x, y et z sont les coordonnées d'un point de cette droite.

  - Si vous voulez **montrer qu'une droite est contenue dans un plan**, il suffit que deux points de cette droite appartiennent au plan (voir *Fiche E5*).
    Pour cela, il vous faut trouver deux points quelconques de la droite en donnant deux valeurs de votre choix à t.

- Utiliser une représentation paramétrique pour **déterminer un vecteur directeur de la droite (d)**

  On trouve un vecteur directeur directement dans la représentation paramétrique :

  ses coordonnées sont les multiplicateurs de t, il s'agit donc du vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\ c\\ e\end{pmatrix}$.

- Utiliser les représentations paramétriques pour **déterminer si deux droites sont parallèles ou non**

  On trouve deux vecteurs directeurs (voir ci-dessus) et on vérifie s'ils sont colinéaires.

- Utiliser les représentations paramétriques pour **déterminer si deux droites sont orthogonales ou non**

  On trouve deux vecteurs directeurs et on vérifie s'ils sont orthogonaux.

- Utiliser les représentations paramétriques pour **déterminer si deux droites sont sécantes ou non**
  - On fait la mise en équation suivante (on ne suppose donc pas à l'avance que M existe !) :

$$M(x\,;y\,;z) \in (d) \cap (d') \iff \begin{cases} x = at+b \\ y = ct+d \\ z = et+f \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = gs+h \\ y = is+j \\ z = ks+l \end{cases} \text{ avec } t \text{ et } s \text{ dans } \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} at+b = gs+h \\ ct+d = is+j \\ et+f = ks+l \end{cases} \text{ avec } t \text{ et } s \text{ dans } \mathbb{R}$$

On obtient un système de 3 équations à 2 inconnues t et s.
Comme d'habitude, on "gèle" une équation et on trouve une valeur de t et de s avec les deux autres équations :
- soit ces valeurs ne vérifient pas l'équation "gelée" et alors le système n'est pas vérifié : les droites ne sont pas sécantes ;
- soit ces valeurs vérifient l'équation "gelée" et alors le système est vérifié : les droites sont bien sécantes.

  - Si elles sont sécantes, on peut **calculer les coordonnées du point d'intersection** :
    - on trouve x en remplaçant t dans $at+b$ (ou s dans $gs+h$),
    - on trouve y en remplaçant t dans $ct+d$ (ou s dans $is+j$),
    - on trouve z en remplaçant t dans $et+f$ (ou s dans $ks+l$).

Remarque : Avec les trois méthodes précédentes, vous savez **étudier les positions relatives de deux droites**.
Rappelons que deux droites sont coplanaires si elles sont sécantes ou parallèles.

Remarques sur les exercices

- L'exercice ① permet de mettre en pratique toutes les techniques de base et de vérifier la rédaction.
- L'exercice ② est un Vrai-Faux.
- L'exercice ③ propose deux petits morceaux d'exercices.
- L'exercice ④ est un QCM.
- L'exercice ⑤ est un problème complet

Peu de problèmes dans cette fiche car les droites sont rarement étudiées seules, sans les plans.
Vous trouverez beaucoup de problèmes mélangeant droites et plans dans la *Fiche E5*.

---

① *Quatre exercices indépendants.*

On se place dans un repère orthonormé de l'espace.

1. On donne les points $A(5\,;-2\,;2)$, $B(4\,;-2\,;3)$ et $C(-1\,;0\,;3)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).

2. On donne la droite $(d) : \begin{cases} x = -1+2t \\ y = -3t \\ z = 2-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Les points $M(5\,;-9\,;-1)$ et $N(-3\,;3\,;-3)$ appartiennent-ils à (d) ?

3. On donne les droites $(d_1) : \begin{cases} x = 1{,}2+3{,}6t \\ y = -0{,}1+1{,}5t \\ z = 1-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, $(d_2) : \begin{cases} x = -2{,}4s \\ y = -s+9 \\ z = 2s-4 \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$

et $(d_3) : \begin{cases} x = 5t'-5 \\ y = 2t'+15 \\ z = 7t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

a. Démontrer que (d_1) et (d_2) sont parallèles.

b. Démontrer que (d_1) et (d_3) sont orthogonales.

4. On donne les droites $(\Delta_1) : \begin{cases} x = -t \\ y = 6t - 5 \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, $(\Delta_2) : \begin{cases} x = -1 + 3s \\ y = -s + 2 \\ z = 5s + 4 \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$

et $(\Delta_3) : \begin{cases} x = -r - 4 \\ y = r + 1 \\ z = -2r \end{cases}$ avec $r \in \mathbb{R}$.

a. Démontrer que (Δ_1) et (Δ_2) ne sont pas sécantes.

b. Démontrer que (Δ_2) et (Δ_3) sont sécantes et déterminer les coordonnées du point d'intersection.

---

② *Dans chaque exercice, une affirmation est donnée.*
Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. L'espace est rapporté à un repère orthonormal et on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ qui admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = -5t' + 3 \\ y = 2t' \\ z = t' + 4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation : Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes.

D'après Baccalauréat Centres Étrangers 2016

2. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées : $A(3 ; -1 ; 4)$, $B(-1 ; 2 ; -3)$, $C(4 ; -1 ; 2)$.

La droite Δ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Affirmation : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

D'après Baccalauréat Amérique du Sud 2015

3. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on donne les points :

$A(1 ; 2 ; 3)$, $B(3 ; 0 ; 1)$, $C(-1 ; 0 ; 1)$ et $D(2 ; 1 ; -1)$.

Affirmation : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

D'après Baccalauréat Métropole 2016

4. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

On donne les points $A(1 ; 1; 0)$, $B(3 ; 0 ; -1)$ et $C(7 ; 1 ; -2)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5 - 2s \\ y = -1 + s \\ z = -2 + s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 2 : Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

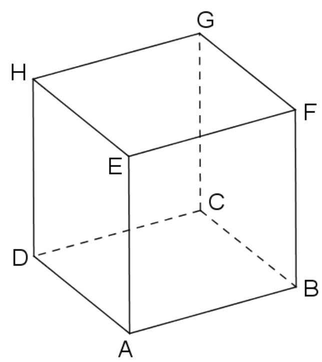
Affirmation 3 : Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

D'après Baccalauréat Liban 2014

---

③ On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.

On se place dans le repère orthonormé $(B ; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$.



1. Déterminer une représentation paramétrique des droites (BH) et (AG).

2. Montrer que (BH) et (AG) sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées.

④ Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points $A(0;1;-1)$ et $B(-2;2;-1)$,
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.

3. Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécantes.

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2016

---

⑤ *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.*
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie la lettre correspondant à l'affirmation exacte.
Aucune justification n'est demandée.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1;-1;-1)$, $B(1;1;1)$ et $C(0;3;1)$.

Soit $\mathscr{D}$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par A.

Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ est :

a. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

c. $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

d. $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

D'après Baccalauréat Asie 2014

2. L'espace est rapporté à un repère orthonormal.
t désigne un paramètre réel.

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t. \end{cases}$

On donne les points de l'espace $M(-1;2;3)$ et $N(1;-2;9)$.

a. La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.

b. La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.

c. La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.

d. La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.

D'après Baccalauréat Pondichéry 2013

3. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le point A a pour coordonnées $(-3;5;4)$.

On note $\mathscr{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, et $\mathscr{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = k + 1 \\ y = k + 3 \\ z = -k + 4 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

a. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.

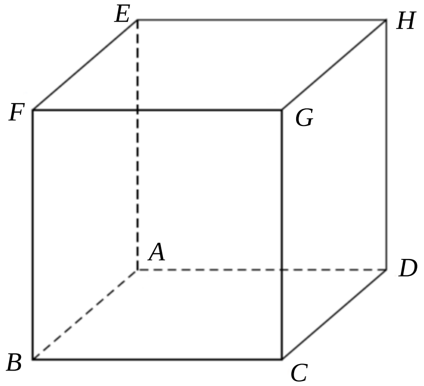
b. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires.

c. Le point A appartient à la droite $\mathscr{D}$.

d. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.

D'après Baccalauréat Liban 2013

⑥ Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$.

1. **a.** Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = 0 \end{cases}$, où s décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

b. Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées $(t\,;\,t\,;\,t)$ où t est un réel.

Soit s et t deux réels quelconques.
On note $M(s\,;\,1-s\,;\,0)$ un point quelconque de la droite (DB) et $N(t\,;\,t\,;\,t)$ un point quelconque de la droite (AG).

2. Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si M et N ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

3. **a.** Montrer que $MN^2 = 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.

b. En déduire la position des points M et N pour laquelle la distance MN est minimale.
Que peut-on dire de la droite (MN) dans ce cas ?

D'après Baccalauréat Antilles Septembre 2015