Correction de GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE - Fiche 4

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥

① **1.** **a.** (d) passe par $A(5\,;-2\,;2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$

donc (d) a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=3t+5\\y=-t-2\\z=2t+2\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$. → Vous pouvez choisir la lettre que vous voulez pour le paramètre.

b. (BC) passe par $B(4\,;-2\,;3)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\2\\0\end{pmatrix}$

donc (BC) a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=-5s+4\\y=2s-2\\z=3\end{cases}$ avec $s\in\mathbb{R}$.

On aurait pu aussi choisir le point C et on aurait eu alors $\begin{cases}x=-5s-1\\y=2s\\z=3\end{cases}$ avec $s\in\mathbb{R}$ qui est <u>une autre représentation paramétrique de la même droite</u>.
Et avec $\overrightarrow{CB}$ comme vecteur directeur, on aurait eu d'autres représentations.

---

2. • $\begin{cases}5=-1+2t\\-9=-3t\\-1=2-t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\dfrac{6}{2}=3\\t=\dfrac{-9}{-3}=3\\t=3\end{cases}$

donc le système est vérifié
donc $M\in(d)$.

• $\begin{cases}-3=-1+2t\\3=-3t\\-3=2-t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\dfrac{-2}{2}=-1\\t=\dfrac{3}{-3}=-1\\t=5\end{cases}$

donc le système n'est pas vérifié
donc $N\notin(d)$.

---

3. **a.** D'après sa représentation paramétrique, (d_1) a pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}3{,}6\\1{,}5\\-3\end{pmatrix}$.

D'après sa représentation paramétrique, (d_2) a pour vecteur directeur $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-2{,}4\\-1\\2\end{pmatrix}$.

$\begin{cases}\dfrac{3{,}6}{-2{,}4}=-1{,}5\\\dfrac{1{,}5}{-1}=-1{,}5\\\dfrac{-3}{2}=-1{,}5\end{cases}$

donc $\vec{u_1}=-1{,}5\,\vec{u_2}$
donc $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires
donc (d_1) et (d_2) sont parallèles.

b. D'après sa représentation paramétrique, (d_3) a pour vecteur directeur $\vec{u_3}\begin{pmatrix}5\\2\\7\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\vec{u_1}\,.\,\vec{u_3} &= 3{,}6\times5+1{,}5\times2+(-3)\times7\\&=18+3-21\\&=0\end{aligned}$$

donc $\vec{u_1}$ et $\vec{u_3}$ sont orthogonaux
donc (d_1) et (d_3) sont orthogonales.

---

4. **a.** Mise en équation : → N'oubliez pas de le préciser.

$M(x\,;y\,;z) \in (\Delta_1)\cap(\Delta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=6t-5 \\ z=1+3t \end{cases}$ et $\begin{cases} x=-1+3s \\ y=-s+2 \\ z=5s+4 \end{cases}$ avec t et s réels

$\Leftrightarrow \begin{cases} -t=-1+3s \\ 6t-5=-s+2 \\ 1+3t=5s+4 \end{cases}$ → J'exprime t en fonction de s dans la 1ère équation.

$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1-3s \\ 6(1-3s)-5=-s+2 \\ 1+3t=5s+4 \end{cases}$ → Je le remplace dans la 2ème équation. → Je gèle la 3ème équation.

$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1-3\times(-\frac{1}{17})=\frac{20}{17} \\ s=-\frac{1}{17} \\ 1+3t=5s+4 \end{cases}$ → Je trouve une valeur de s. → Je l'injecte dans la 1ère équation et je trouve une valeur de t.

Or, $\begin{cases} 1+3\times\frac{20}{17}=\frac{17}{17}+\frac{60}{17}=\frac{77}{17} \\ 5\times(-\frac{1}{17})+4=-\frac{5}{17}+\frac{68}{17}=\frac{63}{17} \end{cases}$ → Je teste les deux valeurs dans l'équation gelée.

donc la 3ème équation n'est pas vérifiée.

Le système est faux,
donc (Δ_1) et (Δ_2) ne sont pas sécantes.

b. Mise en équation :

$M(x\,;y\,;z) \in (\Delta_2)\cap(\Delta_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+3s \\ y=-s+2 \\ z=5s+4 \end{cases}$ et $\begin{cases} x=-r-4 \\ y=r+1 \\ z=-2r \end{cases}$ avec s et r réels

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1+3s=-r-4 \\ -s+2=r+1 \\ 5s+4=-2r \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1+3(-r+1)=-r-4 \\ s=-r+1 \\ 5s+4=-2r \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r=3 \\ s=-3+1=-2 \\ 5s+4=-2r \end{cases}$

Or, $\begin{cases} 5\times(-2)+4=-10+4=-6 \\ -2\times3=-6 \end{cases}$

donc la 3ème équation est vérifiée.

Le système est vrai,
donc (Δ_2) et (Δ_3) sont sécantes.

$\begin{cases} x=-1+3\times(-2)=-7 \\ y=-(-2)+2=4 \\ z=5\times(-2)+4=-6 \end{cases}$ → J'injecte la valeur $s=-2$ dans la représentation de (Δ_2) pour trouver les coordonnées du point

donc le point d'intersection a pour coordonnées $(-7\,;4\,;-6)$.

On aurait pu aussi injecter la valeur $r=3$ dans le système de (Δ_3) : $\begin{cases} x=-3-4=-7 \\ y=3+1=4 \\ z=-2\times3=-6 \end{cases}$ et on trouve bien sûr la même chose.

---

② **1.** L'affirmation est fausse.
Voir l'exercice ① **4. a.** .

---

2. L'affirmation est vraie.
Voir l'exercice ① **3. b.** .

---

3. L'affirmation est fausse.
Voir l'exercice ① **1.** pour trouver les représentations paramétriques.
Voir l'exercice ① **4. a.** pour montrer qu'elles ne sont pas sécantes.

---

4. ◆ L'affirmation 1 est vraie.
Ne cherchez pas une représentation paramétrique de (AB) ! D'abord, c'est long et vous avez de grande chance de ne pas trouver la même que celle proposée, donc c'est du temps perdu...
Voir l'exercice ① **2.** pour vérifier que A et B vérifient le système.

- *L'affirmation 2 est vraie.*
  Voir l'exercice ① **3. b.** .

- *L'affirmation 3 est fausse.*
  Voir l'exercice ① **4. a.** .
  Rappelons que, pour être coplanaires, deux droites doivent être soit sécantes soit parallèles.
  On sait qu'elles ne sont pas parallèles car, d'après l'affirmation 2, elles sont orthogonales.
  Il suffit donc de vérifier qu'elles sont sécantes.

---

③ *L'exercice va nous faire démontrer quelque chose que nous savons déjà, que deux diagonales du cube se coupent...*

1. • On a $B(0;0;0)$ et $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$ donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(BH) passe par B et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BH}$

donc (BH) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1t + 0 \\ y = 1t + 0 \\ z = 1t + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

• On a $A(1;0;0)$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$ donc $G(0;1;1)$.

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(AG) passe par A et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}$

donc (AG) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1s + 1 \\ y = 1s + 0 \\ z = 1s + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -s + 1 \\ y = s \\ z = s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

2. Mise en équation :

$M(x;y;z) \in (BH) \cap (AG) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -s + 1 \\ y = s \\ z = s \end{cases}$ avec t et s réels

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -s + 1 \\ t = s \\ t = s \end{cases}$ → *Il se passe quelque chose de très particulier ! Deux équations identiques... Il est inutile de garder les deux.*

$\Leftrightarrow \begin{cases} s = -s + 1 \\ t = s \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

Pas d'équation gelée à vérifier !
Le système est vrai,
donc (BH) et (AG) sont sécantes.

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ → *Les coordonnées du point d'intersection se trouvent instantanément en injectant la valeur* $t = \frac{1}{2}$ *dans la représentation de* (BH) .

donc le point d'intersection a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

---

④ **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-0\\2-1\\-1-(-1)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

(AB) passe par A et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$

donc (AB) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2s + 0 \\ y = 1s + 1 \\ z = 0s - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2s \\ y = s + 1 \\ z = -1 \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$. → t *est déjà pris comme paramètre de* $\mathcal{D}$.

2. D'après sa représentation paramétrique, $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$\frac{-2}{1} = -2$ et $\frac{1}{1} = 1$

donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires

donc $\mathcal{D}$ et (AB) ne sont pas parallèles.

3. Mise en équation :

$M(x\,;y\,;z) \in (AB) \cap \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2s \\ y=s+1 \\ z=-1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+t \\ z=-1-t \end{cases}$ avec s et t réels

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2s=-2+t \\ s+1=1+t \\ -1=-1-t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2s=-2+0 \\ s+1=1+t \\ t=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} s=1 \\ s+1=1+t \\ t=0 \end{cases}$

Or, $\begin{cases} 1+1=2 \\ 1+0=1 \end{cases}$
donc la 2ème équation n'est pas vérifiée.

Le système est faux,
donc (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécantes.

---

⑤ **1.** **a.** et **d.** sont fausses car les vecteurs directeurs donnés par les représentations paramétriques ne sont pas colinéaires à $\vec{u}$.
Pour **b.** et **c.** , on a la même direction. Il reste donc à vérifier laquelle passe par A .
En remplaçant x , y et z par les coordonnées de A , on obtient $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=-2 \end{cases}$ pour b. et $\begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$ pour c. .

Réponse **c.**

---

2. Avec les deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{MN}$ et $\vec{u}$, on voit tout de suite qu'ils ne sont pas colinéaires, donc **b.** et **d.** sont fausses.

Le produit scalaire $\overrightarrow{MN}.\vec{u}$ donne 0 donc les droites sont orthogonales.
Mais attention, elles pourraient l'être tout en étant sécantes !

On est donc obligé de trouver une représentation paramétrique de (MN) , par exemple avec $\overrightarrow{MN}$ et M , on obtient $\begin{cases} x=2s-1 \\ y=-4s+2 \\ z=6s+3 \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Puis voir si le système $\begin{cases} -2+t=2s-1 \\ -t=-4s+2 \\ -1-t=6s+3 \end{cases}$ est vérifié... Et il ne l'est pas !

Réponse **a.**

---

3. On a intérêt à vérifier **c.** tout de suite, car si elle est vraie, c'est terminé !
Mais elle est fausse... Dommage...

Avec les deux vecteurs directeurs, on voit tout de suite qu'ils ne sont pas colinéaires, donc **a.** est fausse.

Souhaitons que les deux vecteurs directeurs ne sont pas orthogonaux, ce qui éliminera la **d.** et donnera la réponse.
Malheureusement, ils sont orthogonaux.
Et comme pour **4.2.** , les droites sont orthogonales mais elles pourraient être sécantes et alors coplanaires.

Finalement, le système $\begin{cases} t+1=k+1 \\ 2t-1=k+3 \\ 3t+2=-k+4 \end{cases}$ n'est pas vérifié...

Réponse **d.**

---

⑥ **1.** **a.** La question est très facile mais encore faut-il trouver le point et le vecteur directeur qui ont été utilisés...

On a $B(1\,;0\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$ donc $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(DB) passe par D et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DB}$

donc (DB) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=1s+0 \\ y=-1s+1 \\ z=0s+0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=s \\ y=1-s \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ avec $s \in \mathbb{R}$.

b. Il s'agit en fait de trouver $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ comme représentation paramétrique.

On a $A(0\,;0\,;0)$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(AG) passe par A et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}$

donc (AG) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=1t+0 \\ y=1t+0 \\ z=1t+0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

donc les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées $(t\,;t\,;t)$ avec t réel.

2. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} t-s \\ t-(1-s) \\ t-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} t-s \\ t+s-1 \\ t \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} (MN) \perp (AG) \\ (MN) \perp (DB) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \,.\, \overrightarrow{AG} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \,.\, \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t-s)\times 1 + (t+s-1)\times 1 + t\times 1 = 0 \\ (t-s)\times 1 + (t+s-1)\times(-1) + t\times 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t-1=0 \\ -2s+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ s = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M\left(\frac{1}{2} ; 1-\frac{1}{2} ; 0\right) \text{ et donc } M\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0\right) \\ N\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

3. **a.** $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} t-s \\ t+s-1 \\ t \end{pmatrix}$

donc $MN^2 = (t-s)^2 + (t+s-1)^2 + t^2$
$= t^2 - 2ts + s^2 + t^2 + s^2 + 2ts - 2t - 2s + 1 + t^2$
$= 3t^2 - 2t + 2s^2 - 2s + 1$

<u>Méthode 1</u> : pour les courageux qui se souviennent comment on crée la forme canonique

$= 3\left[t^2 - 2\times\frac{1}{3}\times t + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] + 2\left[s^2 - 2\times\frac{1}{2}\times s + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + 1$

$= 3\left[\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] + 2\left[\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 1$

$= 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1$

$= 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.

<u>Méthode 2</u> : pour les prudent qui préfèrent repartir de l'expression donnée et retrouver MN^2

D'autre part, $3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} = 3\left(t^2 - 2\times t\times\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + 2\left(s^2 - 2\times s\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{6}$
$= 3t^2 - 2t + \frac{1}{3} + 2s^2 - 2s + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$
$= 3t^2 - 2t + 2s^2 - 2s + 1$
$= MN^2$

b. MN est minimale lorsque $3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$ est minimal.

Cela se produit lorsque les deux polynômes $\left(t-\frac{1}{3}\right)^2$ et $\left(s-\frac{1}{2}\right)^2$ atteignent leur minimum

c'est-à-dire lorsque $t = \frac{1}{3}$ et $s = \frac{1}{2}$.

D'après la question **2.**, on a alors $M\left(\frac{1}{2} ; 1-\frac{1}{2} ; 0\right)$ et $N\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ et la droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB).