Correction de **GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE - Fiche 2**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫

① **1.** Je prévois à l'avance que je vais démontrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (ou deux autres formés avec A, B et C) sont colinéaires, c'est-à-dire que je pourrai écrire $\overrightarrow{AB} = \ldots \overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{AB}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-2 \\ 2-7 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 8-1 \\ -12-2 \\ -28-7 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -35 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On en déduit que $\overrightarrow{AC} = 7\ \overrightarrow{AB}$ → Le multiplicateur 7 se voit sans calcul.
donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires
donc les points A, B et C sont alignés.

---

2. On peut espérer avoir un triangle isocèle, équilatéral ou rectangle.
Dans tous les cas, on a besoin des trois longueurs :

$$BC = \sqrt{(0-(-1))^2 + (1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}$$

$$BD = \sqrt{(6-(-1))^2 + (6-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{49+25+1} = \sqrt{75}$$

$$CD = \sqrt{(6-0)^2 + (6-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{36+25+9} = \sqrt{70}$$

<u>Un conseil</u> : pour éviter la formule indigeste, on peut d'abord calculer les coordonnées du vecteur, puis appliquer la formule plus légère :

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 1-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } BC = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$$

Et pareil avec $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$.

→ Il n'est ni équilatéral, ni isocèle...

$$\begin{cases} BC^2 + CD^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{70})^2 = 5 + 70 = 75 \\ BD^2 = (\sqrt{75})^2 = 75 \end{cases}$$

→ Attention à bien rédiger cette réciproque du théorème de Pythagore...

donc $BC^2 + CD^2 = BD^2$
donc, d'après le théorème de Pythagore, BCD est rectangle en C.

---

3. La question peut paraître curieuse, mais elle est très classique : trois points définissent un plan à condition de ne pas être alignés...

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-1 \\ 6-2 \\ 4-7 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6{,}4-1 \\ 16{,}8-2 \\ -4{,}4-7 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -7{,}4 \\ 14{,}8 \\ -11{,}4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Rappelons que trois points alignés
sont quand même coplanaires,
mais ils sont dans une infinité de plans...
Ils ne définissent pas UN plan.

Si multiplicateur commun il y a, difficile de le voir.
Calculons alors les trois coefficients de proportionnalité et voyons si nous trouvons trois fois le même :

$$\begin{cases} \dfrac{-7{,}4}{-2} = 3{,}7 \\ \dfrac{14{,}8}{4} = 3{,}7 \\ \dfrac{-11{,}4}{-3} = 3{,}8 \neq 3{,}7 \end{cases}$$

→ Ah ben non...

donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires
donc les points A, B et C ne sont pas alignés
donc ils définissent un plan : la proposition est vraie.

---

4. Comme dans le **2.**, on a besoin des trois longueurs :

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (2-5)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

$$AC = \sqrt{(1-2)^2 + (3-5)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

On voit qu'il est isocèle.
Et comme il n'a pas un côté plus grand que les deux autres, il n'est pas rectangle.

Réponse **b.**

---

5. Calculons les coordonnées d'un vecteur directeur. On n'a pas beaucoup le choix, c'est $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$ ...

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-(-1) \\ 5-5 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On en déduit que $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{OI}$ → Car $\overrightarrow{OI} = 1\,\overrightarrow{OI} + 0\,\overrightarrow{OJ} + 0\,\overrightarrow{OK}$ et donc $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OI}$ sont colinéaires
donc (AB) est parallèle à (OI).

---

6. $M_tN_t^{\,2} = (11-t)^2 + (0{,}8t-(-1))^2 + (1+0{,}6t-5)^2$ → Racine carrée inutile puisqu'on calcule la carré de la longueur.

$= (11-t)^2 + (0{,}8t+1)^2 + (0{,}6t-4)^2$ → Ce n'est pas le moment de faire une erreur de signe !

$= 121 - 22t + t^2 + 0{,}64t^2 + 1{,}6t + 1 + 0{,}36t^2 - 4{,}8t + 16$

$= 2t^2 - 25{,}2t + 138$

Cette valeur est une fonction du second degré de la variable t. → Ça ne peut pas se louper !

Le coefficient dominant 2 est positif,
donc cette fonction est décroissante puis croissante.

Elle atteint son minimum en $t = \dfrac{-(-25{,}2)}{2\times 2} = 6{,}3$. → On reconnaît le bon vieux $\dfrac{-b}{2a}$.

Donc, la valeur $M_tN_t^{\,2}$ et donc la longueur M_tN_t sont minimales au bout de $6{,}3$ secondes.

---

7. **a.** $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-(-1) \\ -3-6 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-(-1) \\ 3-6 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} -1-1 \\ -1-(-1) \\ 0-6 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$

On voit facilement lequel est la somme des deux autres...

$\begin{cases} 1-2=-1 \\ 3+0=3 \\ -3-6=-9 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EH}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont coplanaires
et donc que les points E, F, G et H sont coplanaires.

b. Dire que les quatre points E, F, G et K sont coplanaires (ou non) revient à dire que trois vecteurs formés avec ces quatre points sont coplanaires (ou non). Et j'ai de nombreux choix possibles pour ces trois vecteurs.
Je choisis par exemple $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$, car j'ai déjà leurs coordonnées, puis $\overrightarrow{EK}$ (je garde le même point d'origine E, ce sera plus pratique dans les calculs).
Ils seront coplanaires (ou non) si on pourra écrire (ou non) $\overrightarrow{EK}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{EK} = \ldots\,\overrightarrow{EF} + \ldots\,\overrightarrow{EG}$ (on aurait pu choisir $\overrightarrow{EF}$ en fonction des deux autres, ou $\overrightarrow{EG}$ en fonction des deux autres).

$\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} 6-1 \\ 2-(-1) \\ 4-6 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Attention, cette précision est importante !
C'est grâce à elle que le correcteur saura que, lorsque vous écrivez $\overrightarrow{EK} = x\,\overrightarrow{EF} + y\,\overrightarrow{EG}$, vous n'êtes pas en train de partir de la conclusion...

Mise en équation :
$\overrightarrow{EK} = x\,\overrightarrow{EF} + y\,\overrightarrow{EG}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = x\times(-1) + y\times 1 \\ 3 = x\times 3 + y\times 3 \\ -2 = x\times(-9) + y\times(-3) \end{cases}$ → J'obtiens un système de <u>3 équations</u> à <u>2 inconnues</u>.

coordonnées de $\overrightarrow{EG}$

coordonnées de $\overrightarrow{EF}$

coordonnées de $\overrightarrow{EK}$

Attention à l'importance des $\Leftrightarrow$! Voir à la fin...

Je vais trouver x et y avec les deux premières équations.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=5 \\ 3x+3y=3 \\ -9x-3y=-2 \end{cases}$

Et je "gèle" la 3ème...

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5+x \\ 3x + 3(5+x) = 3 \\ -9x-3y=-2 \end{cases}$
→ J'exprime y en fonction de x
→ et je remplace y par $5+x$ dans la 2ème équation pour n'avoir plus que des x.
→ Je ne touche pas à l'équation gelée.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 + x \\ 6x + 15 = 3 \\ -9x - 3y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 + x \\ x = \dfrac{-12}{6} = -2 \\ -9x - 3y = -2 \end{cases}$$ → J'obtiens la valeur de x.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 + (-2) = 3 \\ x = \dfrac{-12}{6} = -2 \\ -9x - 3y = -2 \end{cases}$$ → Je la remplace dans la 1ère équation pour obtenir la valeur de y.

Et c'est là que la 3ème équation "gelée" va jouer son rôle :

Or : $-9\times(-2) - 3\times3 = 18 - 9 = 9 \neq -2$, donc la troisième équation n'est pas vérifiée : le système est impossible.

Donc, par équivalence, $\overrightarrow{EK} = x\,\overrightarrow{EF} + y\,\overrightarrow{EG}$ est impossible → D'où l'importance des $\Leftrightarrow$.
donc les points E , F , G et K ne sont pas coplanaires.

c. $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix} 19-1 \\ 11-(-1) \\ 36-6 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Mise en équation : → Ne l'oubliez pas.

$\overrightarrow{EL} = x\,\overrightarrow{EF} + y\,\overrightarrow{EG}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18 = x\times(-1) + y\times1 \\ 12 = x\times3 + y\times3 \\ 30 = x\times(-9) + y\times(-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 18 \\ 3x + 3y = 12 \\ -9x - 3y = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 + x \\ 3x + 3\,(\,18 + x\,) = 12 \\ -9x - 3y = 30 \end{cases}$$ → Équation "gelée"

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 + x \\ 6x = 12 - 54 \\ -9x - 3y = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 + x \\ x = \dfrac{-42}{6} = -7 \\ -9x - 3y = 30 \end{cases}$$

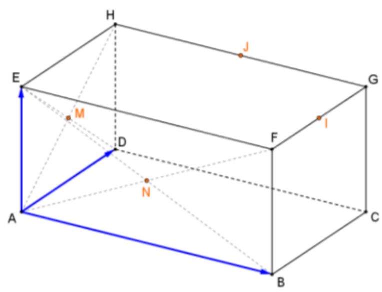
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 - 7 = 11 \\ x = -7 \\ -9x - 3y = 30 \end{cases}$$

Or : $-9\times(-7) - 3\times11 = 63 - 33 = 30$, donc la troisième équation est vérifiée.

On a donc $\overrightarrow{EL} = -7\,\overrightarrow{EF} + 11\,\overrightarrow{EG}$
donc $\overrightarrow{EL}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont coplanaires
donc les points E , F , G et L sont coplanaires.

---

② **a.** → L'énoncé demande de <u>calculer</u> et non seulement de <u>lire</u> les coordonnées.



- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FI}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FG}$ car I milieu de $[FG]$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ car $ABCDEFGH$ pavé droit
$= 1\,\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 1\,\overrightarrow{AE}$

donc $I\,(\,1\,;\dfrac{1}{2}\,;1\,)$.

- $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HJ}$
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HG}$ car J milieu de $[HG]$
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ car $ABCDEFGH$ pavé droit
$= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

donc $J\,(\dfrac{1}{2}\,;1\,;1\,)$.

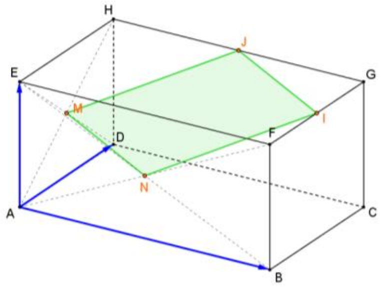
- $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH}$ car M centre de $ADHE$ et milieu de $[AH]$
$= \dfrac{1}{2}(\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\,)$ car $ABCDEFGH$ pavé droit
$= 0\,\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

donc $M\,(\,0\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,)$.

- $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ car N centre de $ABFE$ et milieu de $[AF]$
  $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE})$ car $ABCDEFGH$ pavé droit
  $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

  donc $N(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2})$.

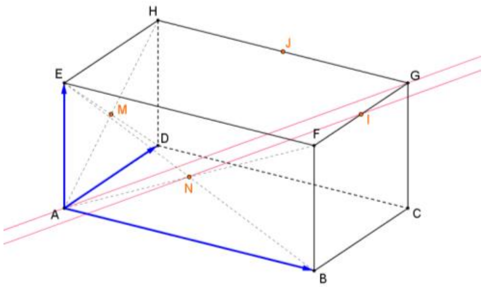
b. $\begin{cases} \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1\\ 1-1/2\\ 1-1\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1/2\\ 1/2\\ 0\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}0-1/2\\ 1/2-0\\ 1/2-1/2\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}-1/2\\ 1/2\\ 0\end{pmatrix}\end{cases}$



donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{NM}$

donc $IJMN$ parallélogramme.

c. $\begin{cases} \overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}1/2-1\\ 0-1/2\\ 1/2-1\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}-1/2\\ -1/2\\ -1/2\end{pmatrix} \\ A(0\,;0\,;0) \text{ et } G(1\,;1\,;1) \text{ donc } \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1-0\\ 1-0\\ 1-0\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\end{cases}$



donc $\overrightarrow{IN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$

donc $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires
donc $(IN) \,//\, (AG)$.

③ **a.** $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ car $ABCD$ parallélogramme

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 0\,\overrightarrow{AE}$

donc $I(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0)$.

b. Attention ! Impossible de calculer IE avec $\sqrt{(x_E-x_I)^2+(y_E-y_I)^2+(z_E-z_I)^2}$ car il nous manque les coordonnées de E.

Les arêtes latérales de la pyramide $ABCDE$ sont de même longueur et la base $ABCD$ est un carré
donc $ABCDE$ est une pyramide régulière
donc le centre I de $ABCD$ est le pied de la hauteur
donc (IE) est orthogonale au plan de base $(ABCD)$
donc AIE rectangle en I. → Toute cette justification n'est pas très difficile, mais il fallait y penser.

I centre de $ABCD$
donc I milieu de $[AC]$
donc $AI = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

AIE rectangle en I
donc, d'après le théorème de Pythagore, $IE^2 + AI^2 = AE^2$

donc $IE = \sqrt{1^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$
$= \sqrt{1-\frac{2}{4}}$
$= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c.
- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$
  $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AK}$ d'après la question précédente

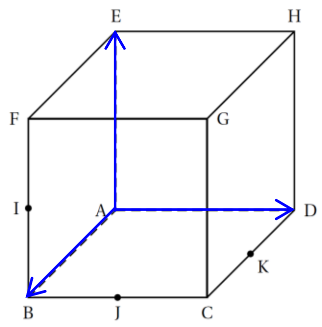
  donc $E(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2})$.

- Par symétrie, I milieu de $[EF]$
  donc $\overrightarrow{IF} = -\overrightarrow{IE}$
  On a alors: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF}$
  $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AK}$

  donc $F(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

④ **1.** On ne demande pas de justifier les coordonnées :

$A(0;0;0)$
$G(1;1;1)$
$I(1;0;\frac{1}{2})$
$J(1;\frac{1}{2};0)$
$K(\frac{1}{2};1;0)$



2. **a.** Pour calculer la longueur MI, il nous faut les coordonnées de M et de I :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= t\,\overrightarrow{AG}\\ &= t(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\\ &= t\,\overrightarrow{AB}+t\,\overrightarrow{AD}+t\,\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

donc $M(t;t;t)$.

$$\begin{aligned}MI^2 &= (1-t)^2+(0-t)^2+(\frac{1}{2}-t)^2\\ &= 1-2t+t^2+t^2+\frac{1}{4}-t+t^2\\ &= 3t^2-3t+\frac{5}{4}\end{aligned}$$

→ Pas de racine carrée puisqu'on calcule MI^2 et non MI.

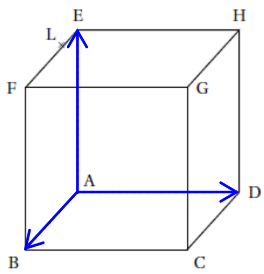
b. Cette valeur est une fonction du second degré de la variable t. → Vous reconnaissez l'exercice ① **6.** ?
Le coefficient dominant 3 est positif, donc cette fonction est décroissante puis croissante.
Elle atteint son minimum en $t=\frac{-(-3)}{2\times3}=\frac{1}{2}$.
Or, $M(t;t;t)$.
Donc, la distance MI est bien minimale pour le point $N(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

---

⑤ Pas de repère défini par l'énoncé, j'en choisis un moi-même :

Je pose le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. → Vous pouvez parler à la 1ère personne pour montrer que vous prenez l'initiative.
Dans ce repère : $D(0;1;0)$ et $B(1;0;0)$.

Si vous choisissez un autre repère, toutes les coordonnées trouvées seront différentes, mais le résultat final sera le même.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EL}\\ &= \overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}\\ &= \overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{car } ABCDEFGH \text{ cube}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+0\,\overrightarrow{AD}+1\,\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

donc $L(\frac{1}{3};0;1)$.

On propose ici une méthode avec le théorème de Pythagore.
On aurait pu utiliser le produit scalaire (voir Fiche E3).

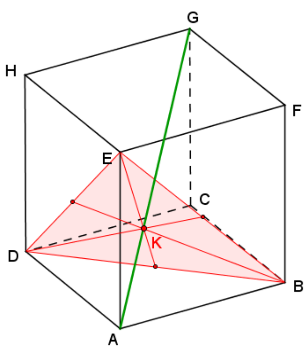
$$\left\{\begin{aligned}&BD=\sqrt{2} \text{ car diagonale d'un carré de côté 1}\\ &\text{donc } BD^2=2\\ &BL^2=(\frac{1}{3}-1)^2+(0-0)^2+(1-0)^2=\frac{4}{9}+1=\frac{13}{9}\\ &DL^2=(\frac{1}{3}-0)^2+(0-1)^2+(1-0)^2=\frac{1}{9}+1+1=\frac{19}{9}\end{aligned}\right.$$

Or, $BD^2+BL^2=2+\frac{13}{9}=\frac{31}{9}\neq DL^2$
donc, d'après le théorème de Pythagore, BDL n'est pas rectangle en B.
La proposition est fausse.

---

⑥ 1ère méthode : sans coordonnées, inspirée de l'exercice ⑨ de la Fiche E1

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AE}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &3\,\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &3\,\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\vec{0} \quad \text{car } ABCD \text{ carré}\\ \Leftrightarrow\ &3\,\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AG}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &3\,\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{GA}\end{aligned}$$



Donc $\overrightarrow{KA}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont colinéaires
et donc les points A, K et G sont alignés.

2$^{\text{ème}}$ méthode : avec un repère et encore un calcul vectoriel, peut-être plus simple

Je pose le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Dans ce repère : $A(0;0;0)$ et $G(1;1;1)$, donc $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AE} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

donc $K(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.

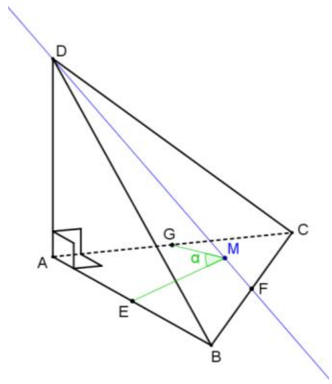
On en déduit que $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$.

Et donc $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$

donc $\overrightarrow{KA}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont colinéaires
et donc les points A, K et G sont alignés.

---

⑦



a.

- $\overrightarrow{DM} = t\,\overrightarrow{DF}$

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = t(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$ car F milieu de $[BC]$ → Je crée $\overrightarrow{AM}$ et les vecteurs du repère $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})) - \overrightarrow{DA}$

  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{t}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{t}{2}\overrightarrow{AC} + (1-t)\overrightarrow{AD}$

  donc $M(\frac{t}{2};\frac{t}{2};1-t)$.

- $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ car E milieu de $[AB]$

  donc $E(\frac{1}{2};0;0)$.

- $ME^2 = (\frac{1}{2}-\frac{t}{2})^2 + (0-\frac{t}{2})^2 + (0-(1-t))^2$ → Pas de racine carrée puisqu'on calcule ME^2 et non ME.

  $= \frac{1}{4} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{4} + 1 - 2t + t^2$

  $= \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.

b.

- De même, on trouve $G(0;\frac{1}{2};0)$

  et donc $MG^2 = (0-\frac{t}{2})^2 + (\frac{1}{2}-\frac{t}{2})^2 + (0-(1-t))^2 = ME^2$

  donc $MG = ME$ et donc MEG isocèle en M.

- Si on pose H le milieu de $[EG]$, MEH est rectangle en H car MEG isocèle en M.

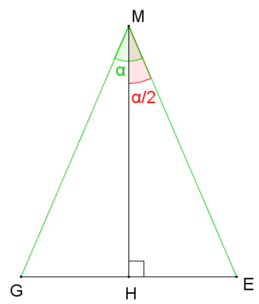
  Alors, $ME \times \sin\frac{\alpha}{2} = EH$

  $= \frac{1}{2}EG$

  $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}BC$ d'après le théorème de la droite des milieux

  $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{2}$ car $[BC]$ est une diagonale d'un carré de côté 1

  $= \frac{1}{2\sqrt{2}}$



c. $ME \times \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow ME = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

On en déduit que plus $\sin\frac{\alpha}{2}$ augmente, plus ME diminue.

Et donc, lorsque α atteint son maximum, ME^2 atteint son minimum.

d. On en déduit que α est maximale lorsque $\frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$ est minimal.

La fonction $t \mapsto \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$ atteint son minimum en $t = \dfrac{-(-\frac{5}{2})}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{5}{6}$.

Le point M a alors pour coordonnées $(\frac{5}{12} ; \frac{5}{12} ; \frac{1}{6})$.

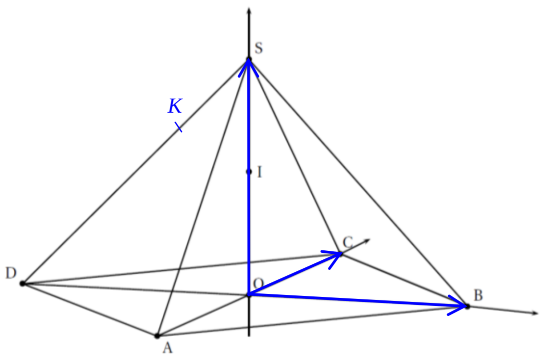
---

⑧ **a.**

- *Le verbe « déterminer » est un peu flou, si vous avez le temps, il vaut mieux calculer...*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OK} &= \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SK}\\
&= \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}\\
&= \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD})\\
&= \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}\\
&= \overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \quad \text{car } O \text{ milieu de } [BD]\\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + 0\,\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}
\end{aligned}$$

donc $K(-\frac{1}{3} ; 0 ; \frac{2}{3})$.



- $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OS}$ car I milieu de $[OS]$

donc $I(0 ; 0 ; \frac{1}{2})$.

$$\begin{cases}
\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}0-1\\0-0\\1/2-0\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\1/2\end{pmatrix}\\
\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1/3-1\\0-0\\2/3-0\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-4/3\\0\\2/3\end{pmatrix}
\end{cases}$$

donc $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$

donc $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires

donc, les points B, I et K sont alignés.

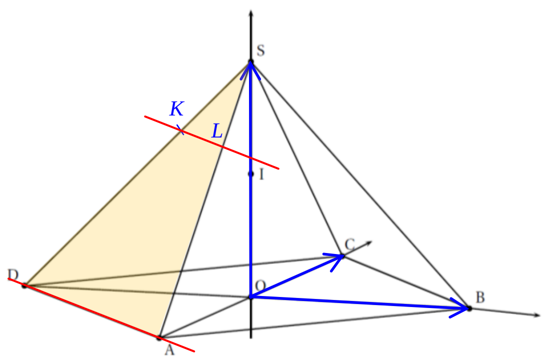
b. $(KL) // (AD)$ et $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$

donc, d'après le théorème de Thalès : $\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$.

En procédant comme dans la question **a.** :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OL} &= \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SL}\\
&= \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}\\
&= \overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA})\\
&= \overrightarrow{OS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\\
&= 0\,\overrightarrow{OB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}
\end{aligned}$$

donc $L(0 ; -\frac{1}{3} ; \frac{2}{3})$.



---

⑨ Je choisis par exemple $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$, mais on aurait pu prendre n'importe quels trois vecteurs formés avec les quatre points.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-(-1) \\ 4-0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Mise en équation :

$\overrightarrow{AS} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = x\times 1 + y\times(-2) \\ 2 = x\times 0 + y\times 5 \\ 4 = x\times 2 + y\times 1 \end{cases}$ → J'obtiens un système de <u>3 équations</u> à <u>2 inconnues</u>.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ 5y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ → Équation gelée

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\times 0{,}4 = -2 \\ y = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 0{,}8 = -1{,}2 \\ y = 0{,}4 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

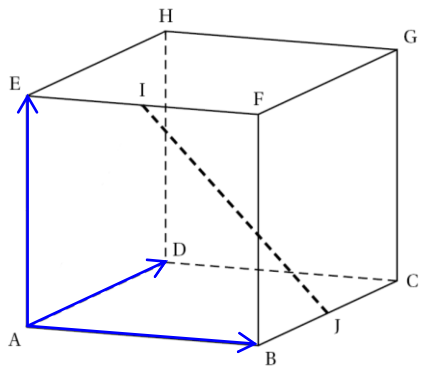
Or : $2\times(-1{,}2) + 0{,}4 = -2{,}4 + 0{,}4 = -2 \neq 4$, donc la troisième équation n'est pas vérifiée : le système est impossible.

Donc, par équivalence, $\overrightarrow{AS} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ est impossible

donc les points A , B , C et S ne sont pas coplanaires.

⑩ **1.** Par lecture graphique :

$I\,(\frac{1}{2}\,;0\,;1)$ et $J\,(1\,;\frac{1}{2}\,;0)$.



2. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1-1/2 \\ 1/2-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ car troisième vecteur de base.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + 0\,\overrightarrow{AE}$.

Mise en équation :

$\overrightarrow{IJ} = x\,\overrightarrow{AE} + y\,\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} = x\times 0 + y\times 1 \\ \dfrac{1}{2} = x\times 0 + y\times 1 \\ -1 = x\times 1 + y\times 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$

Situation très spéciale où les équations simplifiées ne nécessitent aucun travail de transformation !
La 1ère équation donne la valeur potentielle de y .
La 2ème équation peut être choisie comme équation gelée et elle est déjà vérifiée. Elle valide le système.
La 3ème équation donne la valeur de x .

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$

On en déduit $\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

et donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

⑪ **1.** Par lecture graphique :

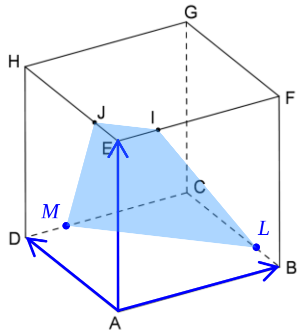
$I\left(\frac{1}{4};0;1\right)$ et $J\left(0;\frac{1}{4};1\right)$.

2. Je choisis par exemple $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IM}$, mais on aurait pu prendre n'importe quels trois vecteurs formés avec les quatre points.

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0-1/4\\1/4-0\\1-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1/4\\1/4\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}1-1/4\\1/4-0\\0-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}3/4\\1/4\\-1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}1/4-1/4\\1-0\\0-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.



Mise en équation :

$\overrightarrow{IJ} = x\,\overrightarrow{IL} + y\,\overrightarrow{IM}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} = x\times\frac{3}{4} + y\times 0 \\ \frac{1}{4} = x\times\frac{1}{4} + y\times 1 \\ 0 = x\times(-1) + y\times(-1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x = -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}x + y = \frac{1}{4} \\ -x-y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4}\times\frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}x + y = \frac{1}{4} \\ y = -x = \frac{1}{3} \end{cases}$

Or : $\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, donc la deuxième équation est vérifiée.

On a donc $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{IL} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{IM}$

donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont coplanaires

donc les points I, J, L et M sont coplanaires.

---

⑫ Exercice pas facile car les quatre propositions sont très variées.

Mais elles ont un point commun, on pourra y répondre avec les coordonnées de D.

Il est très utile d'avoir remarqué que, si O est l'origine du repère, alors le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x_M-0\\y_M-0\\z_M-0\end{pmatrix}$ a les mêmes coordonnées que le point $M(x_M;y_M;z_M)$.

Donc $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ ont les mêmes coordonnées que D, A, B et C.

De $\overrightarrow{OD} = 3\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, on déduit que $\begin{cases} x_D = 3\times x_A - x_B - x_C = 3\times 1 - 2 - 0 = 1 \\ y_D = 3\times y_A - y_B - y_C = 3\times 0 - 1 - 1 = -2 \\ z_D = 3\times z_A - z_B - z_C = 3\times 2 - 0 - 2 = 4 \end{cases}$

- On sait donc que ce n'est pas la **réponse C**.
- On peut calculer rapidement $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$ et voir que ce n'est pas la **réponse B**.
- On voit tout de suite que ces coordonnées ne sont pas proportionnelles : aucun multiplicateur ne permet de passer de 0 à -2.
  Donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.
  Les droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles, aucune chance que les points A, B, C et D soient alignés : ce n'est pas la **réponse D**.

Réponse A

On a traité l'exercice avec des coordonnées.

Mais un peu de lucidité et de relation de Chasles auraient permis d'aller bien plus vite :

$\overrightarrow{OD} = 3\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Ce qui signifie que $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.