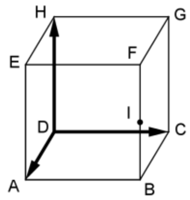
Savoir DÉMONTRER AVEC DES COORDONNÉES

Ce que je dois savoir faire

- **Ayant un repère, lire les coordonnées d'un point**
  - Si le repère est $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées d'un point M sont les trois nombres x, y et z tels que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.
  - Le repère est souvent défini dans l'énoncé par les points d'un solide.
    On peut alors vous demander de **calculer les coordonnées** : il faut pour cela justifier cette égalité.



Dans $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, on a :

- $B(1\,;1\,;0)$ par simple lecture,
- $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$
  $= 1\,\overrightarrow{DA} + 1\,\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DH}$

donc $I\left(1\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$.

- **Créer un repère dans un solide**
  - Certaines démonstrations dans un solide peuvent être demandées sans qu'un repère y soit défini.
    Si vous ne trouvez pas de démonstration sans coordonnées (voir fiche **E1**), il peut être avantageux de définir soi-même un repère et de démontrer en utilisant les coordonnées.
    C'est simplement calculatoire mais, attention, ça peut être plus long…

- **Calculer les coordonnées d'un vecteur**
  - Si on a les coordonnées des points $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$, alors on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
  - Il est parfois plus rapide de <u>décomposer suivant les vecteurs du repère</u> :

    si on peut écrire $\overrightarrow{AB}$ sous la forme $\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Écrivez en colonnes :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - \\ y_B - \\ z_B - \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

- **Calculer une longueur**
  - Si $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$, alors on a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
  - N'oubliez pas que si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, alors $AB = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, ce qui est une formule bien plus simple.

- **Calculer les coordonnées d'un milieu**
  - Si $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$, alors le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\frac{y_A + y_B}{2}\,;\frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

- **Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires** (et donc un **parallélisme** ou un **alignement**) **ou non**
  - Se fait généralement en calculant les coordonnées des deux vecteurs :
    - si on voit clairement un multiplicateur simple entre les coordonnées, concluez directement $\vec{v} = \ldots\,\vec{u}$.
    - sinon, calculez les rapports des abscisses, des ordonnées et des cotes.

- **Démontrer que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ou non**
  - Tout repose sur l'expression de l'un en fonction des deux autres, par exemple $\vec{w}$ sous la forme $x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.
  - On trouve parfois x et y sans aucun calcul mais c'est très rare.
  - **Méthode** : Si ce n'est pas le cas, avec les coordonnées des trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{pmatrix}$,

    on écrit la <u>mise en équation</u> $\vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha'' = \alpha x + \alpha' y \\ \beta'' = \beta x + \beta' y \\ \gamma'' = \gamma x + \gamma' y \end{cases}$.

    On résout ce système de 3 équations à 2 inconnues <u>par équivalences</u> :
    - on "gèle" une des trois équations,
    - avec les deux autres, on trouve une valeur de x et une valeur de y,
    - on teste ces valeurs dans l'équation "gelée" :
      - soit elle est vérifiée, alors :
        - le système est vrai,
        - donc la mise en équation de départ aussi, par équivalence,
        - et donc les vecteurs sont coplanaires et on a les valeurs pour écrire $\vec{w} = \ldots\,\vec{u} + \ldots\,\vec{v}$;

Désolé d'utiliser les lettres x et y qui ne sont pas du tout une abscisse et une ordonnée.

Attention à bien écrire « Mise en équation » pour ne pas donner l'impression qu'on sait à l'avance que les vecteurs sont coplanaires !

- soit elle n'est pas vérifiée, alors :
  - le système est faux,
  - donc la mise en équation de départ aussi, par équivalence,
  - et donc les vecteurs ne sont pas coplanaires.

- **Démontrer que quatre points A , B , C et D sont coplanaires ou non**
  - Même raisonnement que précédemment avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ (par exemple) coplanaires ou non.

Remarques sur les exercices

- L'exercice ① est une série de questions techniques dans un repère quelconque $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec des points dont on connaît les coordonnées.
  Le **6.** fait peur mais c'est un classique : on demande quand une longueur est minimale. Et c'est en fait très simple…
  Le **7.** travaille sur la délicate coplanarité.
- Quasiment tous les exercices suivants se situent dans des solides usuels (sauf les ⑨ et ⑫).
  Il y en a trois dans lesquels le repère n'est pas fourni. Ils peuvent être traités en créant son propre repère ou en utilisant des décompositions vectorielles.
- Les exercices ⑧ à ⑫ traitent de coplanarité.

---

① Les exercices **1.** à **7.** sont indépendants.

1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1;2;7)$, $B(2;0;2)$ et $C(8;-12;-28)$.
Montrer que les points A, B et C sont alignés.

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $B(-1;1;0)$, $C(0;1;2)$ et $D(6;6;-1)$.
Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

D'après Baccalauréat Polynésie 2014

3. *Indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.*

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1;2;7)$, $B(-1;6;4)$ et $C(-6{,}4;16{,}8;-4{,}4)$.

Proposition : Les points A, B et C définissent un plan.

D'après Baccalauréat Antilles 2014

4. *Une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée.*

Dans un repère orthonormé de l'espace, soit les points $A(2;5;-1)$, $B(3;2;1)$ et $C(1;3;-2)$.
Le triangle ABC est :

a. rectangle et non isocèle.
b. isocèle et non rectangle.
c. rectangle et isocèle.
d. équilatéral.

D'après Baccalauréat Amérique du Sud 2014

5. Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points $A(0;-1;5)$ et $B(2;-1;5)$.
La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

D'après Baccalauréat Métropole 2015

6. Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points $A(0;-1;5)$, $B(2;-1;5)$, $C(11;0;1)$ et $D(11;4;4)$.
Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$, le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un réel positif.
On admet que M_t et N_t ont pour coordonnées $M_t(t;-1;5)$ et $N_t(11;0{,}8t;1+0{,}6t)$.

Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$.
À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

D'après Baccalauréat Métropole 2015

7. Dans l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit les points $E(1;-1;6)$, $F(0;2;-3)$, $G(2;2;3)$, $H(-1;-1;0)$, $K(6;2;4)$ et $L(19;11;36)$.

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EH}$.
Montrer que l'un des trois vecteurs est la somme des deux autres.
Que peut-on en déduire pour les points E, F, G et H ?

b. Les points E , F , G et K sont-ils coplanaires ?

c. Montrer que les points E , F , G et L sont coplanaires.

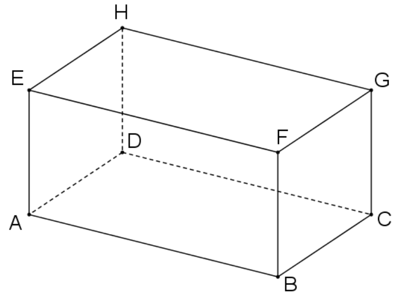
② Dans le pavé droit $ABCDEFGH$, on pose I milieu de $[FG]$, J milieu de $[GH]$, M centre de $ADHE$ et N centre de $ABFE$.

On munit l'espace du repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$.

a. Calculer les coordonnées des points I , J , M et N .

b. Démontrer que $IJMN$ est un parallélogramme.

c. Démontrer que (IN) est parallèle à (AG) .



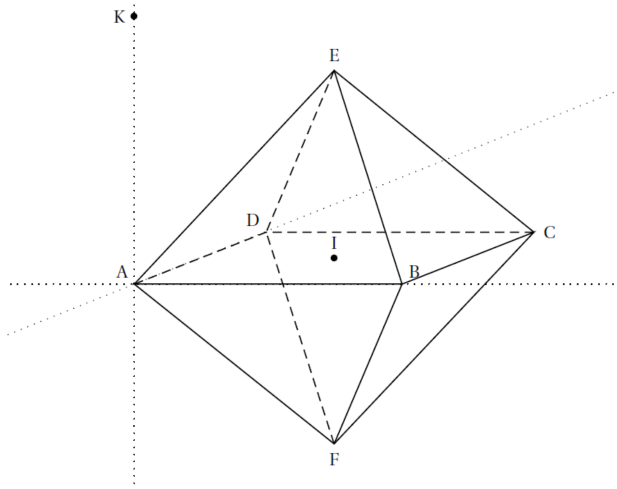
③ On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre I . Une représentation en perspective de ce solide est donnée ci-contre. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AK})$.

a. Calculer les coordonnées du point I .

b. Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c. En déduire les coordonnées des points E et F .



D'après Baccalauréat Liban 2016

④ $ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.
Le point K est le milieu du segment $[CD]$.

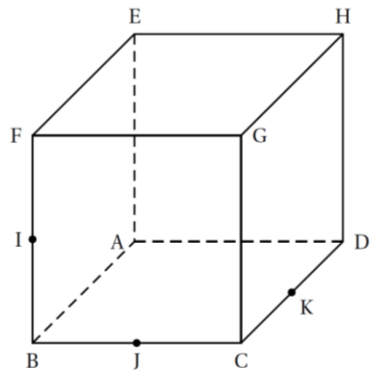
L'espace est rapporté au repère $(A ; \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées de A , G , I , J et K dans ce repère.

2. On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle $[\,0 ; 1\,]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG}$.

a. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.

b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.



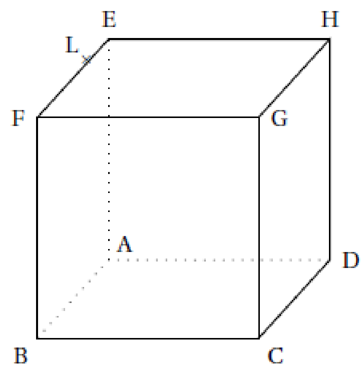
D'après Baccalauréat Pondichéry 2016

⑤ *Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.*

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1.

Le point L est tel que $\overrightarrow{EL} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{EF}$.

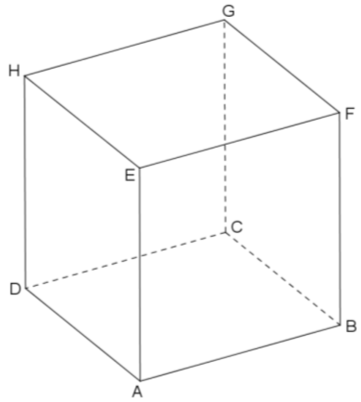
Proposition : Le triangle DBL est rectangle en B .



D'après Baccalauréat Polynésie 2016

⑥ Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, on définit le centre de gravité K du triangle BDE par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{0}$.

Montrer que les points A , K et G sont alignés.



⑦ Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC , ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A .
On désigne par E , F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de l'espace.
On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\,\overrightarrow{DF}$.

On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.

Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

a. Démontrer que $ME^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.

b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M .
En déduire que $ME \sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

c. On admet que α est maximale si et seulement si $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ est maximal.
En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

d. Conclure.

D'après Baccalauréat Métropole 2014

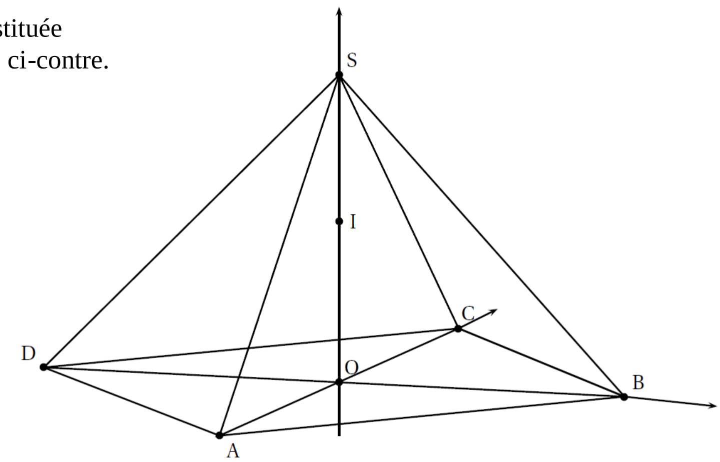
⑧ On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-contre.
Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.

On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

On se place dans le repère $(O\,;\,\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$.

On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

a. Déterminer les coordonnées du point K .
En déduire que les points B , I et K sont alignés.



On admet que, par symétrie, le point L défini par la relation $\overrightarrow{SL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SA}$ est aligné avec C et I .

On admet que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

b. Justifier que B , C , K et L sont coplanaires.
Montrer alors que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2016

⑨ Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :
$A(2\,;-1\,;0)$, $B(3\,;-1\,;2)$, $C(0\,;4\,;1)$ et $S(0\,;1\,;4)$.

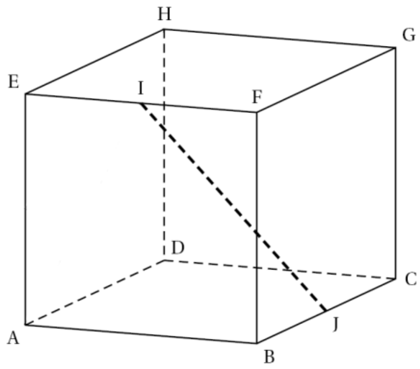
Montrer que les points A , B , C et S ne sont pas coplanaires.

D'après Baccalauréat Centres Étrangers 2021

⑩ On considère un cube $ABCDEFGH$.
Le point I est le milieu du segment $[EF]$ et le point J est le milieu du segment $[BC]$.
On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.



D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2021

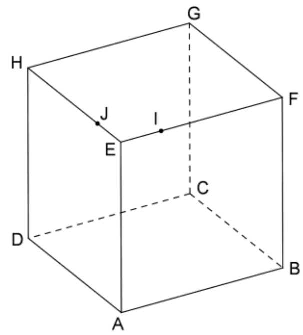
⑪ On considère un cube $ABCDEFGH$.

On donne trois points I et J vérifiant $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I et J.

2. Soit les points $L\left(1\,;\ \frac{1}{4}\,;\ 0\right)$ et $M\left(\frac{1}{4}\,;\ 1\,;\ 0\right)$.
Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.



D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2021 - Sujet 1

⑫ *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Une seule des quatre réponses proposées est exacte.*
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère, on considère les points $A(1\,;\ 0\,;\ 2)$, $B(2\,;\ 1\,;\ 0)$ et $C(0\,;\ 1\,;\ 2)$.

On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

Réponse B : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Réponse C : D a pour coordonnées $(3\,;\ -1\,;\ -1)$.

Réponse D : Les points A, B, C et D sont alignés.

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2021 - Sujet 2