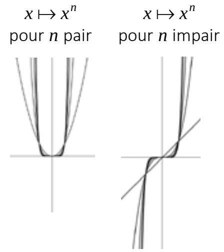
Savoir DÉTERMINER LA LIMITE D'UNE FONCTION

Ce que je dois savoir sur les limites en +∞ ou –∞



- **Les limites usuelles**
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

    $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'ont pas de sens
  - $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$ et les croissances comparées $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Ce que je dois savoir faire sur les limites en +∞ ou –∞

- **Calculer la limite d'une fonction quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$**
  - Trois cas : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ peut être un infini, ou un réel ou ne pas exister.
  - On applique les opérations sur les limites, au brouillon d'abord pour voir s'il n'y a pas une forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$, $(0)\times(\infty)$ ou $\dfrac{(\infty)}{(\infty)}$:

    - pour les polynômes et fractions, factoriser et simplifier par un n^k,

    - en présence de e^x, il faut souvent se ramener à $\dfrac{e^x}{x^n}$ en $+\infty$ ou à $x^n e^x$ en $-\infty$.
  - Attention aux inverses et aux quotients, $\dfrac{1}{(\infty)}$ et $\dfrac{(\ell)}{(\infty)}$ donnent toujours une limite 0.
- **Déduire une limite d'une comparaison ou d'un encadrement**
  - Si $\begin{cases} g(x) \leqslant f(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$, alors, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (idem avec $\geqslant$ et $-\infty$).
  - Si $\begin{cases} h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell \end{cases}$, alors, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
- **Déduire d'une limite une asymptote parallèle à l'axe des abscisses**
  - Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, la droite $(\Delta) : y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
  - Lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, la droite $(\Delta) : y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Ce que je dois savoir sur les limites en un réel

- **Les limites usuelles**
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ mais $\lim\limits_{x\to0-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$
  - Pour les autres cas, aucune difficulté : $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$; $\lim\limits_{x\to a} e^x = e^a$; etc...

Ce que je dois savoir faire sur les limites en un réel

- **Calculer la limite d'une fonction quand x tend vers le réel a**
  - Trois cas : $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ peut être un infini, ou un réel ou ne pas exister.
  - Si a n'est pas valeur interdite, pour les fonctions usuelles : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
  - On applique les opérations sur les limites (rarement de forme indéterminée).

    Pour $\dfrac{(0)}{(0)}$, factoriser et simplifier par le $(x - \ldots)$ responsable des annulations.

⚠ Les cas problématiques sont $\dfrac{1}{(0)}$ et $\dfrac{(\ell)}{(0)}$ qui peuvent donner $+\infty$ ou $-\infty$.

Tout dépend de comment le dénominateur tend vers 0 :

- s'il est positif: $\dfrac{1}{(0)}$ donne $+\infty$ mais $\dfrac{(\ell)}{(0)}$ dépend du signe de ℓ ;

- s'il est négatif: $\dfrac{1}{(0)}$ donne $-\infty$ mais $\dfrac{(\ell)}{(0)}$ dépend du signe de ℓ.

Il est conseillé de présenter un tableau de signes qui clarifie bien les choses.

Et alors, les limites $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$ (notée aussi $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$) et $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$ (notée aussi $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$) peuvent être différentes.

- **Déduire une limite d'une comparaison ou d'un encadrement**
  - Mêmes techniques que quand $x\to\infty$.
- **Déduire d'une limite une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées**
  - Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$,

    la droite $(\Delta) : x = a$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

Conseil méthodologique

Avant toute rédaction au propre, évaluez d'abord la limite de tous les morceaux qui forment votre $f(x)$:

tend vers …

tend vers …

donc la somme tend vers …

$$\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x+1}$$

donc le quotient tend vers …

tend vers …

Ce travail préliminaire vous permet de repérer à l'avance le résultat et la manière de présenter, ou si vous avec une forme indéterminée, ou s'il faut faire une étude de signes.
Attention, il faut le faire pour chaque cas, on peut ne pas avoir la même chose avec $x \to -\infty$ et avec $x \to +\infty$.

Pour être efficace, vous devez maîtriser sans hésiter les rapports entre :
- les " très grands ", qui tendent vers $+\infty$, qu'on notera $(+\infty)$,
- les " très petits " qui tendent vers $-\infty$, qu'on notera $(-\infty)$,
- les " très proches de 0 " qui tendent vers 0, qu'on notera (0) (qu'on appelle souvent à tort " très petits " !).

Il est facile de comprendre les sommes et les produits (attention quand même à $(\infty) \times (0)$ qui est une forme indéterminée).
Mais les quotients provoquent souvent des erreurs :

- $\dfrac{(\infty)}{(\infty)}$ et $\dfrac{(0)}{(0)}$ sont des formes indéterminées ;
- $\dfrac{1}{(0)}$ et $\dfrac{(\ell)}{(0)}$ donnent une limite ∞ , mais il faut faire une étude de signes pour savoir si c'est $+\infty$ ou $-\infty$;
- $\dfrac{1}{(\infty)}$ donne une limite 0 , quelque soit son signe, et bien sûr, $\dfrac{(0)}{(\infty)}$ aussi.

Ce que je dois savoir faire aussi

- **Calculer la limite d'une fonction composée**

  - Repérer d'abord quelles sont les deux fonctions u et v qui se composent $f : x \mapsto u(x) \mapsto v(\,u(x)\,)$.

    Préparer la structure .... $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\ldots} u(x) = \ldots \\ \lim\limits_{X\to\ldots} v(\,X\,) = \ldots \end{cases}$ où X joue le rôle de $u(x)$.

  - Repérer ensuite la valeur α vers quoi tend x : .... $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \ldots \\ \lim\limits_{X\to\ldots} v(\,X\,) = \ldots \end{cases}$

  - Calculer cette 1^ère limite β : .... $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \beta \\ \lim\limits_{X\to\ldots} v(\,X\,) = \ldots \end{cases}$

    Attention, β est parfois immédiat, mais parfois nécessite de "lever" une forme indéterminée avant.

  - β est la valeur vers laquelle tend $u(x)$ donc X : .... $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \beta \\ \lim\limits_{X\to\beta} v(\,X\,) = \ldots \end{cases}$

  - Calculer cette 2^ème limite γ : .... $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \beta \\ \lim\limits_{X\to\beta} v(\,X\,) = \gamma \end{cases}$

    γ est généralement immédiat.

  - γ est la réponse : donc par composition, $\lim\limits_{x\to\alpha} v(\,u(x)\,) = \gamma$.

  Remarque : La deuxième fonction v sera généralement la racine carrée, une puissance, l'exponentielle, plus rarement une fonction trigonométrique.

  Concernant l'exponentielle, pensez qu'on eut aussi utiliser $\lim\limits_{X\to-\infty} X\,e^X$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X}$.

Conseil de bon sens

Tracez votre fonction à la calculatrice pour conjecturer les limites et, au pire, éviter d'écrire des limites fausses…

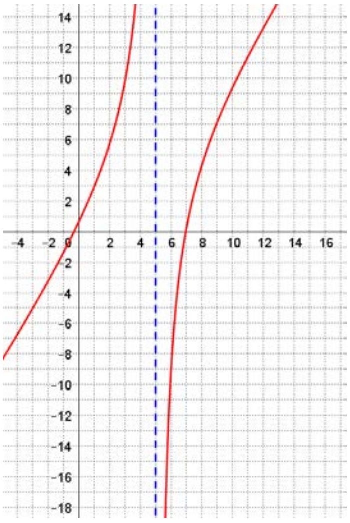
Remarques sur les exercices

- L'exercice ① consiste à conjecturer des limites à partir d'un graphique.
- Pour s'entraîner sur les techniques :
  - l'exercice ② propose des calculs de limites en $+\infty$ et en $-\infty$,
  - l'exercice ③ propose des calculs de limites en un réel.
- Les exercices ④ à ⑥ sont des petits problèmes.
- L'exercice ⑦ propose des calculs de limites de fonctions composées.
  Voir aussi la fiche *F2 - Étudier une fonction composée*.

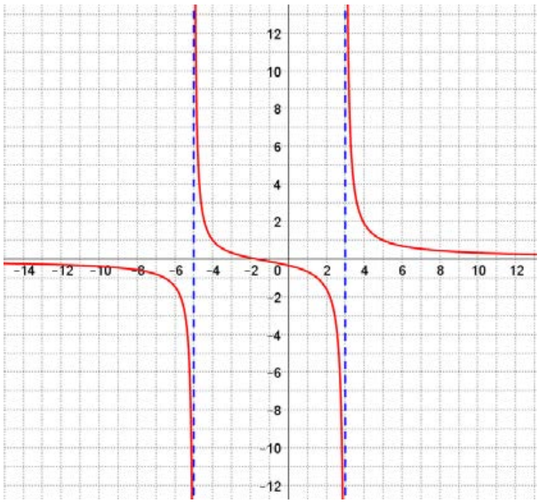
Retenez que les quatre difficultés sont :
- les **formes indéterminées**,
- les $\dfrac{(\ell)}{(0)}$ avec étude de signes,
- les **croissances comparées** avec e^x ,
- les **limites par compositions**.

① En observant les courbes de f proposées, conjecturer toutes les limites possibles :

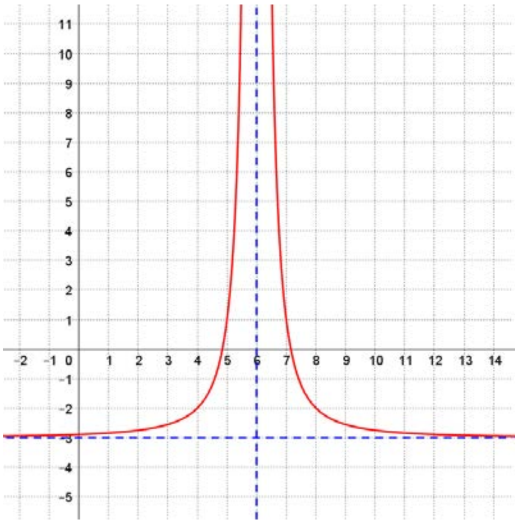
1.



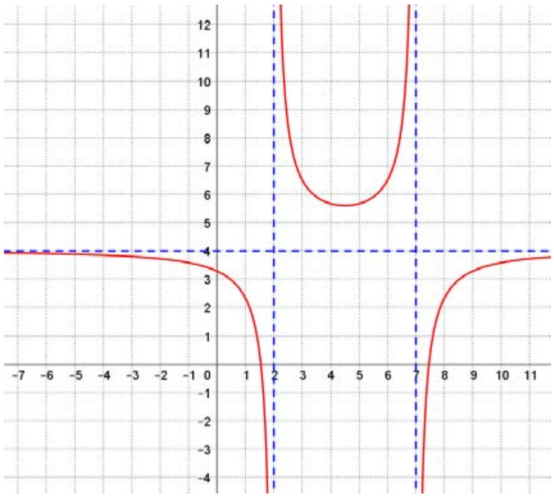
2.



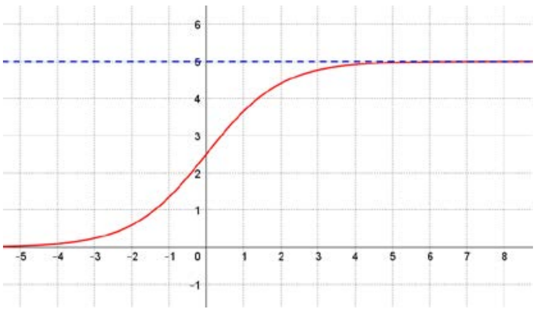
3.



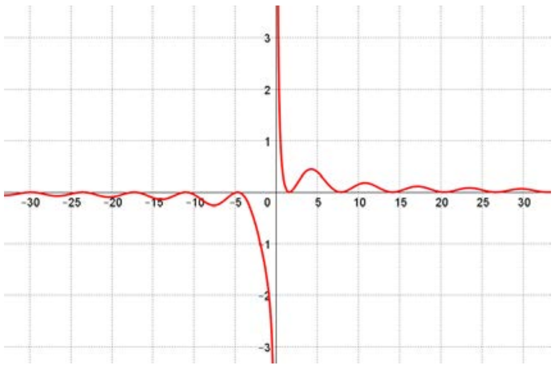
4.



5.



6.



② Déterminer les limites des expressions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$ si c'est possible, et donner les éventuelles asymptotes :

1. $f(x) = 3x^2 - x$.
2. $g(x) = \dfrac{x^2 - 2}{2x + 1}$.
3. $h(x) = x + \cos x$.
4. $v(x) = e^x + x - 1$.
5. $w(x) = e^x (x - 1)$.
6. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} + 1$.
7. $H(x) = \dfrac{4 - 3x}{1 - x^2}$.
8. $h(x) = e^x (x^2 - 1)$.
9. $G(x) = -10x + 3 - \dfrac{5}{x - 1}$.
10. $f_1(x) = x + e^x$.
11. $f_2(x) = x - e^x$.
12. $\varphi(x) = \dfrac{1 + \sin x}{x}$.
13. $F(x) = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$.
14. $u(x) = \dfrac{e^x + 1}{x^2}$.
15. $V(x) = x - \sqrt{x}$.
16. $U(x) = \dfrac{1 - x^2}{3x^2 + x + 1}$.
17. $W(x) = \dfrac{e^x}{x + 1}$.

---

③ Étudier les limites au voisinage d'un réel a , c'est calculer la limite quand x tend vers $a+$ et la limite quand x tend vers $a-$ si elles sont différentes, sinon simplement calculer la limite quand x tend vers a .

Déterminer les limites des expressions suivantes au voisinage demandé et donner les éventuelles asymptotes :

1. $F(x) = x^2 - 5x + 1$ au voisinage de 2 .
2. $h(x) = \dfrac{x + 1}{x - 3}$ au voisinage de 3 .
3. $g_1(x) = x (x - 1\,000)$ au voisinage de $1\,000$.
4. $j(x) = x + \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0 .
5. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ au voisinage de 0 .
6. $G(x) = \dfrac{1 - x}{(x + 1)^2}$ au voisinage de -1 .
7. $v(x) = 1 + x \cos \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0 .
8. $H(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x}$ au voisinage de 0 .
9. $v(x) = \dfrac{e^x - 8}{2 - x}$ au voisinage de 2 .
10. $\varphi(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + x - 2}$ au voisinage de 1 .
11. $u(x) = \dfrac{4 - x^2}{x + 2}$ au voisinage de -2 .

12. $w(x) = \dfrac{x+2}{e^x - 1}$ au voisinage de 0.

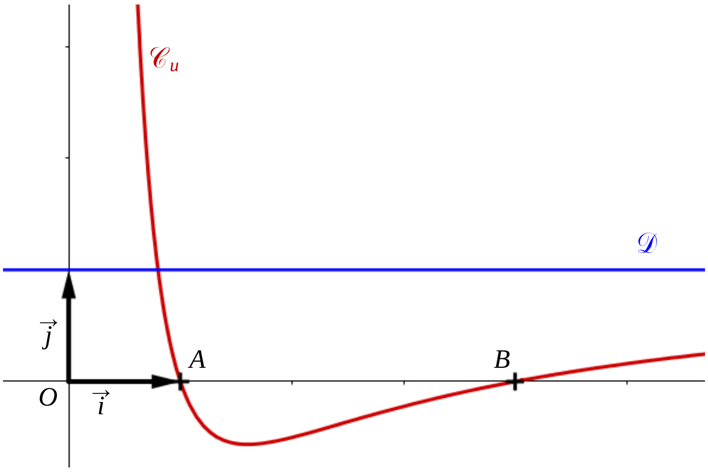
10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \sin\dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0.

11. $F_5(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ au voisinage de 1.

---

④ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$, où a, b et c sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points $A(1 ; 0)$ et $B(4 ; 0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

a. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.

b. Donner la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$.

En déduire la valeur de a.

c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

D'après Baccalauréat Asie 2015

---

⑤ « Discuter suivant les valeurs d'un paramètre » signifie classer les différents résultats possibles en fonction des différentes valeurs du paramètre.

Dans cet exercice, n désigne un paramètre entier relatif.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^2}$.

a. Étudier la limite de f_n en $+\infty$ lorsque $n = 3$.

b. Étudier la limite de f_n en $+\infty$ lorsque $n = -2$.

c. Discuter les limites des fonctions f_n en $+\infty$ suivant les valeurs de n.

⑥ Pour étudier une fonction à valeurs absolues, on sépare en deux cas : $\begin{cases} \text{lorsque } f(x) \geqslant 0\,,\ |\,f(x)\,| \text{ s'écrit } f(x) \\ \text{lorsque } f(x) < 0\,,\ |\,f(x)\,| \text{ s'écrit } -f(x)\,. \end{cases}$

Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ -1 \}$ par $g(x) = \dfrac{|\,x-1\,|}{x+1}$.

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	… …
signes de $x-1$	
écritures de $|\,x-1\,|$	
écritures de $\dfrac{|\,x-1\,|}{x+1}$	

b. Étudier les limites de G en $+\infty$ et $-\infty$.

c. Étudier les limites de G lorsque x tend vers -1 .

d. Donner les asymptotes à la courbe représentative de G .

⑦ Déterminer les limites des fonctions composées :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x)^5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)^5$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}}$.

6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right)^7$.

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}$.

8. $\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ x<2}} \sqrt{\dfrac{2}{2-x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x^2)^6$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x^2)^6$.

10. Les limites de $\dfrac{e^{x-1}}{x-1}$ aux voisinages de $-\infty$, de 1 et de $+\infty$.

11. $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1)\,e^{2x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)\,e^{2x+1}$.

12. $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{\cos x}$.