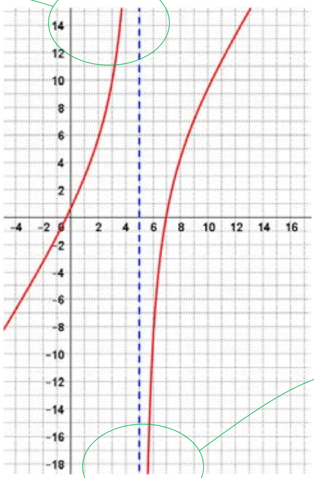
Correction de **FONCTIONS - Fiche 1**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦

① **1.**

$\lim\limits_{x \to 5-} f(x) = +\infty$

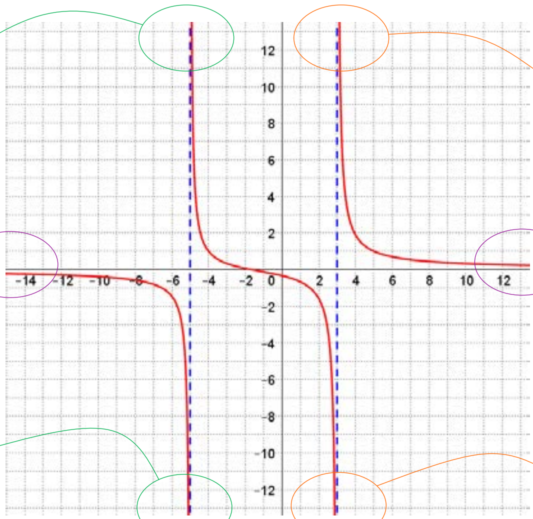


$\lim\limits_{x \to 5+} f(x) = -\infty$

2.

$\lim\limits_{x \to -5+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = +\infty$



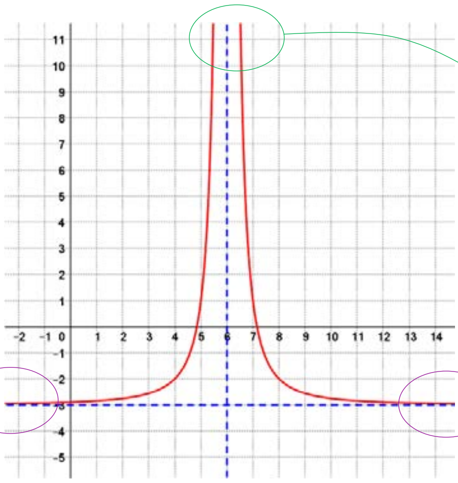
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -5-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = -\infty$

3.



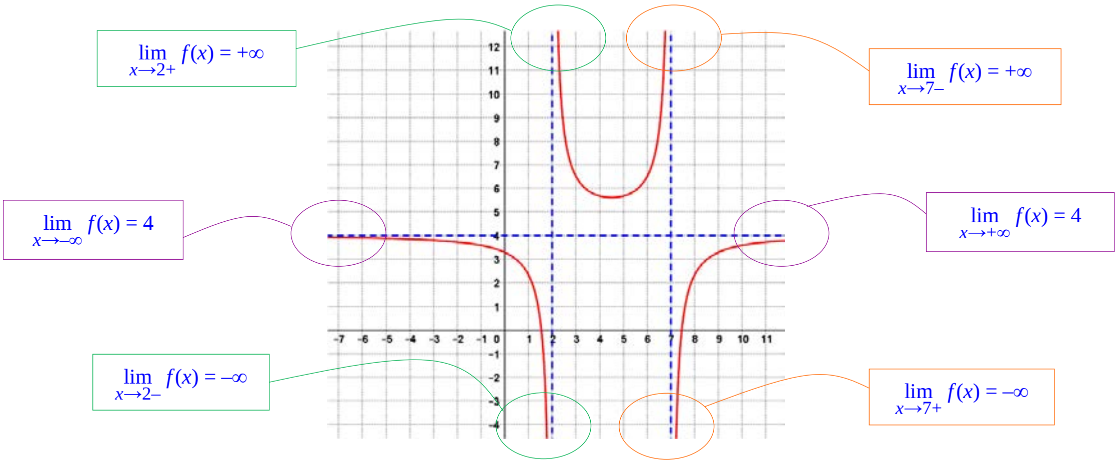
$\lim\limits_{x \to 6} f(x) = +\infty$

On remarque que les deux limites $\lim\limits_{x \to 6+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 6-} f(x)$ sont égales.
On peut donc les écrire en une seule limite.

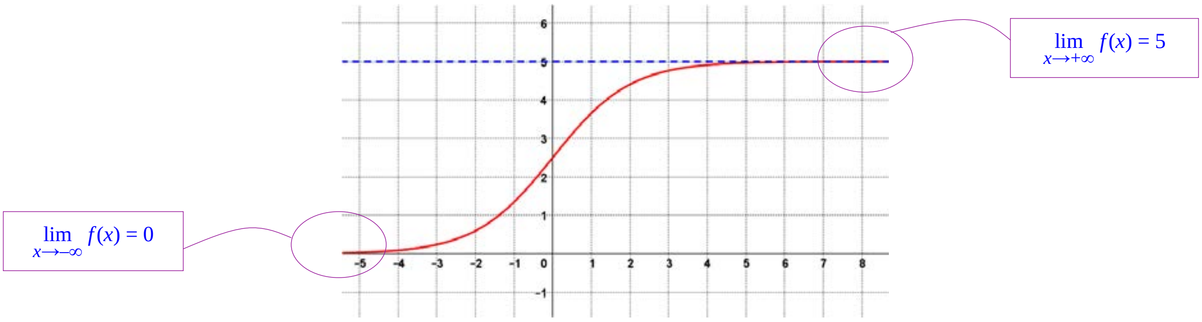
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$

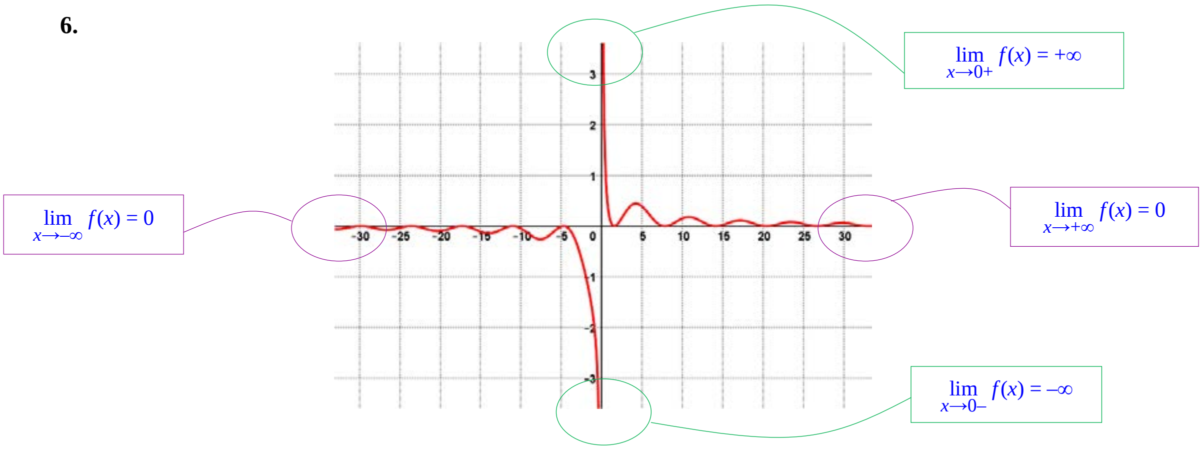
4.



5.



6.



② **1.**

- Limite en $+\infty$:

  Au brouillon : $\overset{+\infty}{3x^2} - \overset{-\infty}{x}$ somme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$

  $3x^2 - x = \underset{+\infty}{x}\,\underset{+\infty}{(3x - 1)}$ $+\infty$ → Je factorise.

  $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (3x - 1) = +\infty \end{cases}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- Limite en $-\infty$:

  Au brouillon : $\overset{+\infty}{3x^2} - \overset{+\infty}{x}$ $+\infty$

  $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty \end{cases}$ donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. → On pouvait aussi réutiliser la factorisation avec les limites de x et $3x - 1$.

- Il n'y a pas d'asymptote en $+\infty$ ou en $-\infty$.

2.

- Limite en $+\infty$:

  Au brouillon : $\dfrac{\overset{+\infty}{x^2-2}}{\underset{+\infty}{2x+1}}$ quotient indéterminé $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$

$$\frac{x^2-2}{2x+1} = \frac{x\left(x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\overset{+\infty}{x}-\overset{0}{\frac{2}{x}}}{2+\underset{0}{\frac{1}{x}}} \quad \begin{matrix}+\infty \\ 2\end{matrix}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\frac{2}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2+\frac{1}{x}\right) = 2 \end{cases}$$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

- Limite en $-\infty$: Le brouillon montre un **quotient indéterminé** $\dfrac{(+\infty)}{(-\infty)}$ mais on a déjà fait la factorisation.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-\frac{2}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2+\frac{1}{x}\right) = 2 \end{cases}$$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

- Il n'y a pas d'asymptote en $+\infty$ ou en $-\infty$.

---

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ → L'encadrement de $\cos x$ entre -1 et 1 est un classique (ça fonctionne aussi avec $\sin x$)

donc $x-1 \leqslant x+\cos x \leqslant x+1$.

- Limite en $+\infty$:

$$\begin{cases} x-1 \leqslant x+\cos x \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty \end{cases}$$ → Les $x-1$ "poussent" par dessous les $x+\cos x$ vers $+\infty$ (et on remarque que les $x+1$ ne servent à rien).

donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

- Limite en $-\infty$:

$$\begin{cases} x+\cos x \leqslant x+1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty \end{cases}$$ → Cette fois, ce sont les $x+1$ qui "poussent" les $x+\cos x$ par dessus vers $-\infty$ (et les $x-1$ qui ne servent à rien).

donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

- Il n'y a pas d'asymptote en $+\infty$ ou en $-\infty$.

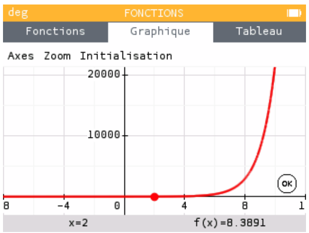
4.

- Limite en $+\infty$:

  Au brouillon : $\overset{+\infty}{e^x}+\overset{+\infty}{(x-1)} \quad +\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty \end{cases}$$

donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$.



- Limite en $-\infty$:

  Au brouillon : $\overset{0}{e^x}+\overset{-\infty}{(x-1)} \quad -\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty \end{cases}$$

donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} v(x) = -\infty$.

- Il n'y a pas d'asymptote en $+\infty$ ou en $-\infty$.

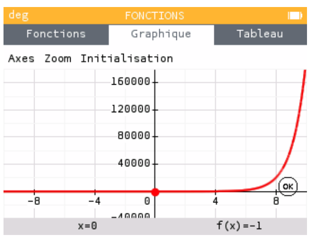
5.

- Limite en $+\infty$:

  Au brouillon : $\overset{+\infty}{e^x}\overset{+\infty}{(x-1)} \quad +\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty \end{cases}$$

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = +\infty$.



- Limite en $-\infty$:

Au brouillon : $\overset{0}{e^x}\,\overset{-\infty}{(x-1)}$ produit indéterminé $(0)\times(-\infty)$

$e^x(x-1) = \overset{0}{x\,e^x} - \overset{0}{e^x}$ 0 → Je développe pour faire apparaître la forme $x\,e^x$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0 \text{ par croissances comparées} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} w(x) = 0$.

- On déduit des limites qu'il y a une asymptote d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

6.

- Limite en $+\infty$:

Au brouillon : $\overset{0}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} - \overset{0}{\dfrac{1}{x}} + 1$ 1

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0 \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Pas de limite en $-\infty$ à cause de la racine carrée...

- On déduit de la limite qu'il y a une asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

7.

- Limite en $+\infty$:

Au brouillon : $\dfrac{\overset{-\infty}{4-3x}}{\underset{-\infty}{1-x^2}}$ quotient indéterminé $\dfrac{(-\infty)}{(-\infty)}$

$\dfrac{4-3x}{1-x^2} = \dfrac{x\left(\dfrac{4}{x}-3\right)}{x\left(\dfrac{1}{x}-x\right)} = \dfrac{\overset{0}{\dfrac{4}{x}}-3}{\underset{0}{\dfrac{1}{x}}-x}$ $\begin{matrix} -3 \\ -\infty \end{matrix}$ 0 et aucun problème de signe... $-\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4}{x}-3\right) = -3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}-x\right) = -\infty \end{cases}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$.

- Limite en $-\infty$:

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{4}{x}-3\right) = -3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x}-x\right) = +\infty \end{cases}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} H(x) = 0$.

- On déduit des limites qu'il y a une asymptote d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

8.

- Limite en $+\infty$:

Au brouillon : $\overset{+\infty}{e^x}\,\overset{+\infty}{(x^2-1)}$ $+\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-1) = +\infty \end{cases}$

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

- Limite en $-\infty$:

Au brouillon : $\overset{0}{e^x}\,\overset{+\infty}{(x^2-1)}$ produit indéterminé $(0)\times(+\infty)$

$e^x(x^2-1) = x^2e^x - e^x$ → Je développe pour faire apparaître la forme x^2e^x.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0 \text{ par croissances comparées} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$.

- On déduit de la limite qu'il y a une asymptote d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

9.

- Limite en $+\infty$:

Au brouillon : $\overbrace{-10x+3}^{-\infty} - \overbrace{\dfrac{5}{\underbrace{x-1}_{+\infty}}}^{0}$ $\quad -\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (-10x+3) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{5}{x-1}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{donc, par somme,} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = -\infty\ .$$

- Limite en $-\infty$: Le 2ème brouillon n'est pas indispensable...

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (-10x+3) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{5}{x-1}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{donc, par somme,} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = +\infty\ .$$

- Il n'y a pas d'asymptote en $+\infty$ ou en $-\infty$.

---

10. Les brouillons ne sont pas indispensables car c'est très simple.

- Limite en $+\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \end{cases}$$

donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.

- Limite en $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$$

donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.

- Il n'y a pas d'asymptote en $+\infty$ ou en $-\infty$.

11.

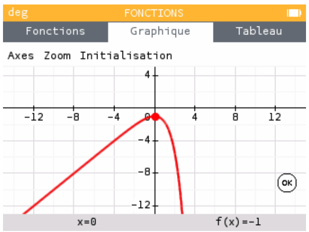
- Limite en $+\infty$:

Au brouillon : $\overbrace{x}^{+\infty} - \overbrace{e^{x}}^{+\infty}$ **différence indéterminée** $(+\infty)-(+\infty)$

$x - e^{x} = x\left(1 - \dfrac{e^{x}}{x}\right)$ → Je factorise pour faire apparaître la forme $\dfrac{e^{x}}{x}$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty \ \text{ par croissances comparées, donc par différence, } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{e^{x}}{x}\right) = -\infty \end{cases}$$

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = -\infty$.



- Limite en $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$$

donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = -\infty$.

- Il n'y a pas d'asymptote en $+\infty$ ou en $-\infty$.

12.

- Limite en $+\infty$:

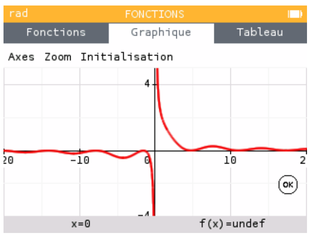
Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$: → On ne considère que les x positifs...

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

donc $0 \leqslant 1 + \sin x \leqslant 2$

donc $\dfrac{0}{x} \leqslant \dfrac{1+\sin x}{x} \leqslant \dfrac{2}{x}$ car x positif → ... pour justifier que les comparaisons ne changent pas de sens.

donc $0 \leqslant \dfrac{1+\sin x}{x} \leqslant \dfrac{2}{x}$



$$\begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{1+\sin x}{x} \leqslant \dfrac{2}{x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \end{cases}$$

donc, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. → On peut aussi invoquer « d'après le théorème des gendarmes » .

- Limite en $-\infty$:

  Pour tout $x \in]-\infty\,;0[$: → *On ne considère que les x négatifs...*

  $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

  donc $0 \leqslant 1+\sin x \leqslant 2$

  donc $\dfrac{0}{x} \geqslant \dfrac{1+\sin x}{x} \geqslant \dfrac{2}{x}$ car x négatif → *... pour justifier que les comparaisons changent de sens.*

  donc $0 \geqslant \dfrac{1+\sin x}{x} \geqslant \dfrac{2}{x}$

  De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$. → *Le « De même » est très pratique mais n'est accepté que pour deux rédactions exactement identiques.*

- On déduit des limites qu'il y a une asymptote d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

13.

- Limite en $+\infty$:

  Au brouillon : $\dfrac{\overset{-\infty}{1-e^x}}{\underset{+\infty}{1+e^x}}$ *quotient indéterminé* $\dfrac{(-\infty)}{(+\infty)}$

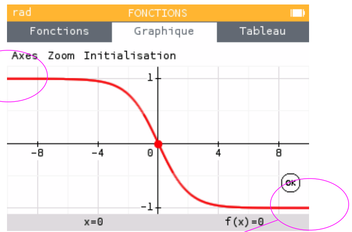
  $$\frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{e^x\left(\frac{1}{e^x}-1\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)} = \frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}$$

  → *Remarquons qu'on "lève" une forme indéterminée avec e^x sans faire appel aux croissances comparées.*

  $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{e^x}-1\right) = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{e^x}+1\right) = 1 \end{cases}$$

  → *C'est un peu brutal mais tout de même assez évident...*

  donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -1$.



- Limite en $-\infty$:

  Au brouillon : $\dfrac{1-\overset{0}{e^x}}{1+\underset{0}{e^x}}$ $\dfrac{1}{1}$ → 1

  $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (1-e^x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (1+e^x) = 1 \end{cases}$$

  donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 1$.

- On déduit des limites qu'il y a une asymptote d'équation $y = -1$ en $+\infty$ et une asymptote d'équation $y = 1$ en $-\infty$.

14.

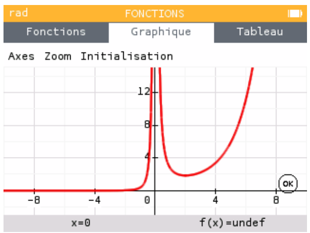
- Limite en $+\infty$:

  Au brouillon : $\dfrac{\overset{+\infty}{e^x+1}}{\underset{+\infty}{x^2}}$ *quotient indéterminé* $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$

  $$\frac{e^x+1}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

  $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ par croissances comparées} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$$

  donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.



- Limite en $-\infty$:

  Au brouillon : $\dfrac{\overset{1}{e^x+1}}{\underset{+\infty}{x^2}}$ → 0

  $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$$

  donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$.

- On déduit de la limite qu'il y a une asymptote d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

15.

- Limite en $+\infty$:

  Au brouillon : $\overset{+\infty}{x} - \overset{+\infty}{\sqrt{x}}$ *différence indéterminée* $(+\infty)-(+\infty)$

  $$x-\sqrt{x} = x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x}\right) = x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 \end{cases}$$

Pas de limite en $-\infty$
à cause de la racine carrée...

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$.

Autre factorisation possible :

Pour les deux factorisations, retenez que x se décompose en $\sqrt{x} \times \sqrt{x}$.

$x - \sqrt{x} = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - 1) = +\infty \end{cases}$$

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$.

---

16. • Limite en $+\infty$:

Au brouillon : $\dfrac{\overset{-\infty}{1-x^2}}{\underset{+\infty}{3x^2+x+1}}$ quotient indéterminé $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$

$$\frac{1-x^2}{3x^2+x+1} = \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\overset{0}{\frac{1}{x^2}}-1}{3+\underset{0}{\frac{1}{x}}+\underset{0}{\frac{1}{x^2}}}$$

-1, 3, $\dfrac{-1}{3}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}-1\right) = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) = 3 \end{cases}$$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) = -\dfrac{1}{3}$.

• Limite en $-\infty$:

De même : $\lim\limits_{x\to-\infty} U(x) = -\dfrac{1}{3}$.

• On déduit des limites qu'il y a une asymptote d'équation $y = -\dfrac{1}{3}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

---

17. • Limite en $+\infty$:

Au brouillon : $\dfrac{\overset{+\infty}{e^x}}{\underset{+\infty}{x+1}}$ quotient indéterminé $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$

1ère méthode : factorisation par e^x, pas la meilleure...

$$\frac{e^x}{x+1} = \frac{e^x}{e^x\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \text{ par croissances comparées, donc, par inverse, } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$$

Attention à la limite $\dfrac{1}{(0)}$!
Il faut préciser le signe pour choisir entre $+\infty$ et $-\infty$.

donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{1}{e^x}\right) = 0$ avec $\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{1}{e^x}$ positif pour tout $x \in]0\,;+\infty[$

donc, par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}} = +\infty$.

2ème méthode : factorisation par x, bien mieux !

$$\frac{e^x}{x+1} = \frac{x\,\frac{e^x}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{e^x}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \text{ par croissances comparées} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1 \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{e^x}{x}}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$.

3ème méthode : par compensation

$$\frac{e^x}{x+1} = \frac{e^x}{x}\times\frac{x}{x+1}$$

→ Je crée un x en dénominateur pour avoir $\dfrac{e^x}{x}$ mais je **compense** avec un x en numérateur.

$$= \frac{e^x}{x}\times\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{e^x}{x}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \text{ par croissances comparées} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1 \text{ donc, par inverse, } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} = 1 \end{cases}$$

donc, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}} = +\infty$.

- Limite en $-\infty$:

Au brouillon : $\dfrac{e^x}{x+1}$ 0 0 $-\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 0$.

- On déduit de la limite qu'il y a une asymptote d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

③ **1.** Au brouillon : $x^2 - 5x + 1$ 4 -10 -5

Par somme, $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 5x + 1) = -5$.

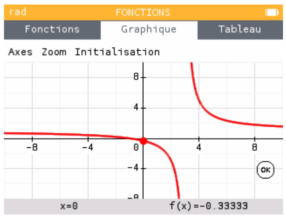
Il n'y a pas d'asymptote au voisinage de 2 .

2. Au brouillon : $\dfrac{x+1}{x-3}$ 4 0 $-\infty$ ou $+\infty$ → C'est la situation la moins agréable : on ne sait pas si c'est $+\infty$ ou $-\infty$, il faut faire une étude de signes de $x - 3$.

x		3	
signes de $x-3$	$-$	0	$+$

Lorsque $x > 3$, on a $x - 3$ positif.

Lorsque $x < 3$, on a $x - 3$ négatif.



- Limite en 3 par valeurs inférieures :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} (x+1) = 4 \text{ positif} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} (x-3) = 0 \text{ avec } (x-3) \text{ négatif} \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} h(x) = -\infty$. → Attention au rôle essentiel de **4**, c'est son signe **positif** qui joue avec le signe négatif de $x - 3$ pour donner $-\infty$.

- Limite en 3 par valeurs supérieures :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} (x+1) = 4 \text{ positif} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} (x-3) = 0 \text{ avec } (x-3) \text{ positif} \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} h(x) = +\infty$. → Là aussi, le signe **positif** de **4** joue avec le signe positif de $x - 3$ pour donner $+\infty$.

- Il y a une asymptote d'équation $x = 3$.

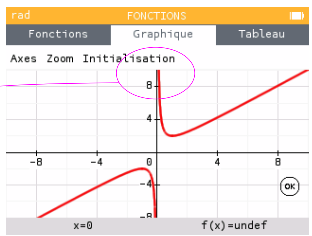
3. Au brouillon : $x(x - 1\,000)$ 1 000 0 → Aucune difficulté, ce n'est pas du tout $(+\infty) \times (0)$!

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1\,000} x = 1\,000 \\ \lim\limits_{x \to 1\,000} (x - 1000) = 0 \end{cases}$$

donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 1\,000} g_1(x) = 0$.

Il n'y a pas d'asymptote au voisinage de 1 000 .

4. Au brouillon : $x + \dfrac{1}{x}$ 0 $-\infty$ ou $+\infty$ $-\infty$ ou $+\infty$ → Pas besoin de tableau pour les signes de x autour de 0 ...



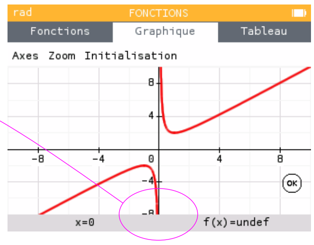
- Limite en 0 par valeurs supérieures :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0 \end{cases}$$

donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} j(x) = +\infty$.

- Limite en 0 par valeurs inférieures :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x = 0 \end{cases}$$ donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} j(x) = -\infty$.



- Il y a une asymptote d'équation $x = 0$. → C'est l'axe des abscisses.

---

5. Au brouillon : $\dfrac{\underbrace{e^x - 1}_{e^0 = 1 \;\to\; 0}}{\underbrace{e^x + 1}_{e^0 = 1 \;\to\; 2}}$ → Aucune difficulté, à condition de ne pas hésiter sur $e^0 = 1$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (e^x - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} (e^x + 1) = 2 \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{2} = 0$.

Il n'y a pas d'asymptote au voisinage de 0 .

---

6. Au brouillon : $\dfrac{1 - x}{(x+1)^2}$; $1-x \to 2$; $\to +\infty$; $(x+1)^2 \to$ 0 positif ! → Bonne surprise avec le dénominateur !

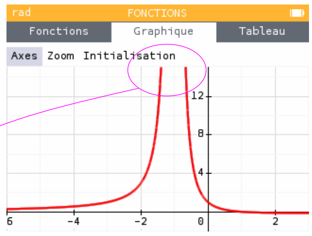
-

x		-1	
signes de $(x+1)^2$	+	0	+

→ $(x+1)^2$ est positif quand $x < -1$ et quand $x > -1$.
Il est donc inutile de rédiger deux cas...

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1} (1 - x) = 2 \text{ positif} \\ \lim\limits_{x \to -1} (x+1)^2 = 0 \text{ avec } (x+1)^2 \text{ positif} \end{cases}$$ → On groupe tout en une seule limite.

donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to -1} G(x) = +\infty$.



- Il y a une asymptote d'équation $x = -1$.

---

7. Au brouillon : $1 + x \cos \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{1}{x} \to -\infty$ ou $+\infty$; $\cos\dfrac{1}{x}$: pas de limite ! → Impossible d'appliquer des opérations... mais je reconnais cos ...

- D'une part, pour tout $x \in \,]0 \,;+\infty[$:

$$-1 \leqslant \cos\frac{1}{x} \leqslant 1$$

donc $-x \leqslant x\cos\dfrac{1}{x} \leqslant x$ → Pas de changement de sens car x positif.

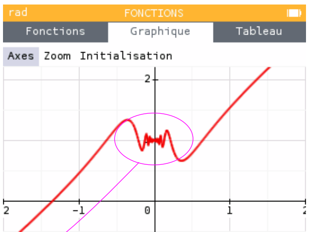
donc $1 - x \leqslant 1 + x\cos\dfrac{1}{x} \leqslant 1 + x$

D'autre part, pour tout $x \in \,]-\infty \,; 0[$:

$$-1 \leqslant \cos\frac{1}{x} \leqslant 1$$

donc $-x \geqslant x\cos\dfrac{1}{x} \geqslant x$ → Changement de sens car x négatif.

donc $1 - x \geqslant 1 + x\cos\dfrac{1}{x} \geqslant 1 + x$



Dans les deux cas, on obtient un encadrement de $1 + x\cos\dfrac{1}{x}$ par les mêmes expressions.

Or, $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} (1 + x) = 1 \end{cases}$$

donc, par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0} v(x) = 1$.

C'est un exemple de valeur interdite (c'est 0) qui ne provoque pas d'asymptote verticale.

- Il n'y a pas d'asymptote au voisinage de 0 .

---

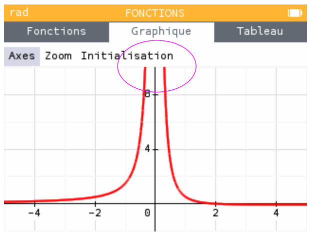
8. Au brouillon : $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x}$; $\dfrac{1}{x^2} \to +\infty$; $\dfrac{1}{2x} \to -\infty$ ou $+\infty$

soit somme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$ si x positif
soit somme pas indéterminée $(+\infty) - (-\infty)$ si x négatif

- Limite en 0 par valeurs inférieures :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{2x} = -\infty \end{cases}$$ donc, par différence, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} H(x) = +\infty$.

- Limite en 0 par valeurs supérieures :



$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \text{ donc par somme, } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right) = +\infty \end{cases}$$
donc, par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} H(x) = +\infty$.

- Il y a une asymptote d'équation $x = 0$. → C'est l'axe des abscisses.

---

9. Au brouillon : $\dfrac{e^x - 8}{2-x}$ $e^2 - 8$ 0 $-\infty$ ou $+\infty$

x		2	
signes de $2-x$	+	0	−

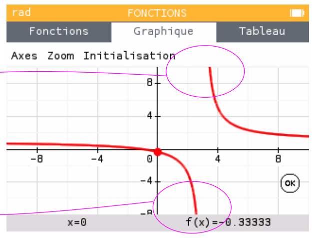
Lorsque $x > 2$, on a $2 - x$ négatif.

Lorsque $x < 2$, on a $2 - x$ positif.

- Limite en 2 par valeurs inférieures :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (e^x - 8) = e^2 - 8 = -0{,}6... \text{ négatif} \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (2-x) = 0 \text{ avec } (2-x) \text{ positif} \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} h(x) = -\infty$.



- Limite en 2 par valeurs supérieures :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (e^x - 8) = e^2 - 8 = -0{,}6... \text{ négatif} \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (2-x) = 0 \text{ avec } (2-x) \text{ négatif} \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} h(x) = +\infty$.

- Il y a une asymptote d'équation $x = 2$.

---

10. Au brouillon : $\dfrac{x-2}{x^2+x-2}$ -1 0 $-\infty$ ou $+\infty$ → Cela va dépendre des signes de $x^2 + x - 2$ autour de 1 ...

Et les signes d'un polynôme du second degré, on sait faire !

- $\Delta = 1^2 - 4\times1\times(-2) = 9 > 0$

donc, le dénominateur a deux racines, $\dfrac{-1+\sqrt{9}}{2\times1} = 1$ et $\dfrac{-1-\sqrt{9}}{2\times1} = -2$.

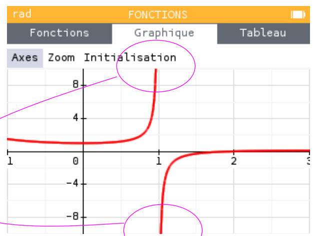
Le coefficient dominant 1 est positif, donc a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signes de x^2+x-2		+	0	−	0	+	

- Limite en 1 par valeurs supérieures :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-2) = -1 \text{ négatif} \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x^2+x-2) = 0 \text{ avec } x^2+x-2 \text{ positif} \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \varphi(x) = -\infty$.



- Limite en 1 par valeurs inférieures :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-2) = -1 \text{ négatif} \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x^2+x-2) = 0 \text{ avec } x^2+x-2 \text{ négatif} \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \varphi(x) = +\infty$.

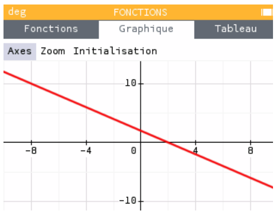
- Il y a une asymptote d'équation $x = 1$.

11. Au brouillon : $\dfrac{4 - x^2}{x + 2}$ $\dfrac{4 - x^2 \to 0}{x+2 \to 0}$ quotient indéterminée $\dfrac{(0)}{(0)}$

Un forme indéterminée rare…
$x + 2$ est responsable de l'annulation du dénominateur en 2 .
Mais si le numérateur s'annule aussi en 2 , c'est qu'il contient aussi un facteur $(x+2)$ caché (pas trop…).

- $\dfrac{4 - x^2}{x + 2} = \dfrac{(2 - x)\cancel{(2 + x)}}{\cancel{x + 2}} = 2 - x$

  $\lim\limits_{x \to -2} u(x) = \lim\limits_{x \to -2} (2 - x) = 4$.
- Il n'y a pas d'asymptote au voisinage de -2 .



Attention ! C'est une fausse droite car -2 est bien une valeur interdite qui provoque un trou infinitésimal, et donc invisible, en $(-2 ; 4)$.
Vous avez là un exemple, un peu artificiel, de valeur interdite qui ne provoque pas d'asymptote verticale.

---

12. Au brouillon : $\dfrac{x + 2}{e^x - 1}$ $\dfrac{x+2 \to 2}{e^0 - 1 = 0}$ $-\infty$ ou $+\infty$

→ Cela va dépendre des signes de $e^x - 1$.

- $e^x - 1 > 0$
  $\Leftrightarrow e^x > 1$
  $\Leftrightarrow x > 0$

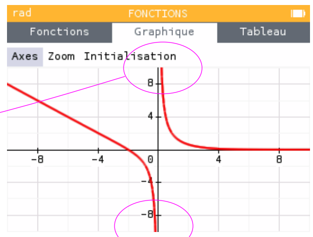
→ Vous devez maîtriser ces trois lignes.

x		0	
signes de $e^x - 1$	$-$	0	$+$

- Limite en 0 par valeurs supérieures :

  $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x + 2) = 2 \text{ positif} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (e^x - 1) = 0 \text{ avec } e^x - 1 \text{ positif} \end{cases}$

  donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} w(x) = +\infty$.



- Limite en 0 par valeurs inférieures :

  $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (x + 2) = 2 \text{ positif} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (e^x - 1) = 0 \text{ avec } e^x - 1 \text{ négatif} \end{cases}$

  donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} w(x) = -\infty$.
- Il y a une asymptote d'équation $x = 0$.

13.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

  $-1 \leqslant \sin\dfrac{1}{x} \leqslant 1$

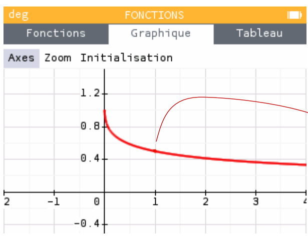
  donc $\dfrac{1}{x^2} - 1 \leqslant \dfrac{1}{x^2} + \sin\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{x^2} + 1$

  Or, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right) = +\infty$

  donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
- Il y a une asymptote d'équation $x = 0$.

---

14. Au brouillon : $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ $\dfrac{\sqrt{x} - 1 \to 0}{x - 1 \to 0}$ quotient indéterminée $\dfrac{(0)}{(0)}$



On pense à la situation du **11.** , où on avait factorisé avec l'identité remarquable $a^2 - b^2$.
Or x est le carré de $\sqrt{x}$ et 1 est le carré de 1 .

- $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \dfrac{\cancel{\sqrt{x} - 1}}{\cancel{(\sqrt{x} - 1)}(\sqrt{x} + 1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$

  $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$

  donc, par somme et par inverse, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{1}{2}$.
- Il n'y a pas d'asymptote au voisinage de 1 .

Là aussi, 1 est bien une valeur interdite : il y a donc un trou infinitésimal en $\left(1 ; \dfrac{1}{2}\right)$.

④ **a.** $u(1) \;=\; a + \dfrac{b}{1} + \dfrac{c}{1^2} \;=\; a + b + c$

$u(4) \;=\; a + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{4^2} \;=\; a + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{16}$

b. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{b}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^2} = 0 \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = a$.

c. $A\,(\,1\,;0\,) \in \mathscr{C}_u$ donc $u(1) = 0$ et donc $a + b + c = 0$.

$B\,(\,4\,;0\,) \in \mathscr{C}_u$ donc $u(4) = 0$ et donc $a + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{16} = 0$.

La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_u$ en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 1$ et donc $a = 1$.

On en déduit $\begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 1 + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{16} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -c - 1 \\ 1 + \dfrac{-c-1}{4} + \dfrac{c}{16} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -c - 1 \\ 16 - 4c - 4 + c = 0 \end{cases}$

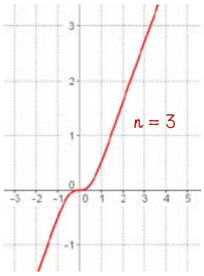
$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -c - 1 \\ c = \dfrac{-12}{-3} = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 - 1 = -5 \\ c = 4 \end{cases}$

On a bien $u(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

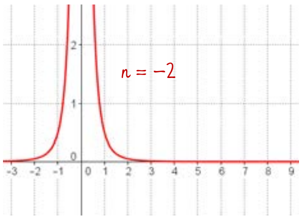
---

⑤ **a.** $f_3\,(x) \;=\; \dfrac{x^3}{1 + x^2} \;=\; \dfrac{x^2 \times x}{x^2\,(\,\frac{1}{x^2} + 1\,)} \;=\; \dfrac{x}{\frac{1}{x^2} + 1}$



$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (\,\frac{1}{x^2} + 1\,) = 1 \end{cases}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3\,(x) = +\infty$.

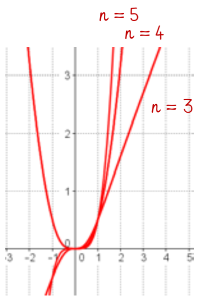
b. $f_{-2}\,(x) \;=\; \dfrac{x^{-2}}{1 + x^2} \;=\; \dfrac{1}{x^2\,(\,1 + x^2\,)}$



$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\,(\,1 + x^2\,) = +\infty$

donc, par inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_{-2}\,(x) = 0$.

c. ◆ Pour $n \geqslant 3$:

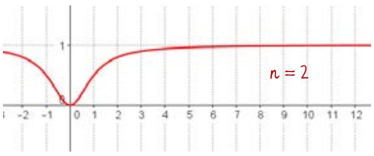


$f_n\,(x) \;=\; \dfrac{x^n}{1 + x^2} \;=\; \dfrac{x^2\,x^{n-2}}{x^2\,(\,\frac{1}{x^2} + 1\,)} \;=\; \dfrac{x^{n-2}}{\frac{1}{x^2} + 1}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-2} = +\infty \text{ car } n - 2 \geqslant 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (\,\frac{1}{x^2} + 1\,) = 1 \end{cases}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n\,(x) = +\infty$.

◆ Pour $n = 2$:

$f_2\,(x) \;=\; \dfrac{x^2}{1 + x^2} \;=\; \dfrac{x^2}{x^2\,(\,\frac{1}{x^2} + 1\,)} \;=\; \dfrac{1}{\frac{1}{x^2} + 1}$

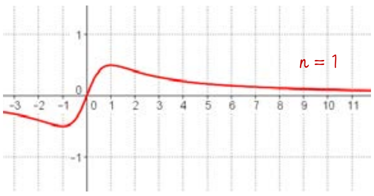


$\lim\limits_{x \to +\infty} (\,\frac{1}{x^2} + 1\,) = 1$

donc, par inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2\,(x) = 1$.

◆ Pour $n = 1$:

$f_1\,(x) \;=\; \dfrac{x}{1 + x^2} \;=\; \dfrac{x}{x\,(\,\frac{1}{x} + x\,)} \;=\; \dfrac{1}{\frac{1}{x} + x}$



$\lim\limits_{x \to +\infty} (\,\frac{1}{x} + x\,) = +\infty$

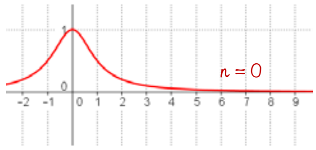
donc, par inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1\,(x) = 0$.

- Pour $n = 0$:

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + x^2) = +\infty$$

donc, par inverse, $\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = 0$.

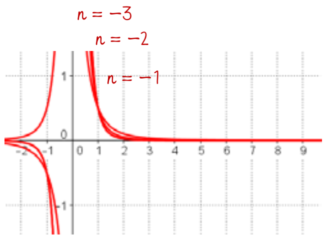


- Pour $n \leqslant -1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2} = \frac{1}{x^{-n}(1+x^2)}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} x^{-n} = +\infty \text{ car } -n \geqslant 1 \\ \lim_{x \to +\infty} (1 + x^2) = +\infty \end{cases}$$

donc, par produit puis inverse, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.



⑥ **a.**

x	$-\infty$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ 1	1 $\quad$ $+\infty$
signes de $x-1$	$-$	$-$ $\quad$ 0	$+$
écritures de $\lvert x-1 \rvert$	$-x+1$	$-x+1$ $\quad$ 0	$x-1$
écritures de $\dfrac{\lvert x-1 \rvert}{x+1}$	$\dfrac{-x+1}{x+1}$ ‖	$\dfrac{-x+1}{x+1}$ $\quad$ 0	$\dfrac{x-1}{x+1}$

b.

- Limite en $+\infty$:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \end{cases}$$ donc, par quotient, $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 1$.

- Limite en $-\infty$:

$$\frac{-x+1}{x+1} = \frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

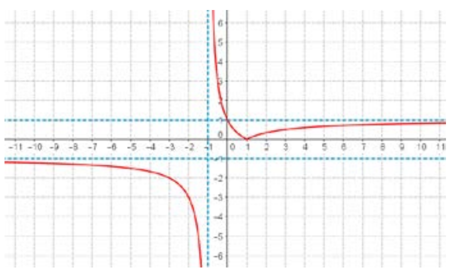
$$\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} \left(-1 + \frac{1}{x}\right) = -1 \\ \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \end{cases}$$ donc, par quotient, $\lim_{x \to -\infty} G(x) = -1$.

c. Au voisinage de -1 , $G(x) = \dfrac{-x+1}{x+1}$.

x	-1	
signes de $x+1$	$-$ $\quad$ 0	$+$

- $$\begin{cases} \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (-x + 1) = 2 \\ \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x + 1) = 0 \text{ avec } (x+1) \text{ négatif} \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} G(x) = -\infty$.



- $$\begin{cases} \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (-x + 1) = 2 \\ \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x + 1) = 0 \text{ avec } (x+1) \text{ positif} \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} G(x) = +\infty$.

d. On déduit des questions précédentes que la courbe admet une asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$, une asymptote d'équation $y = -1$ en $-\infty$ et une asymptote d'équation $x = -1$.

⑦ **1.** La fonction composée est $x \mapsto x^2 - 1 \mapsto \sqrt{x^2-1}$.
La 2ème fonction est la fonction racine carrée.

1ère étape : je place mes deux fonctions.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to} (x^2-1) = & \to \text{La 1ère fonction est } x \mapsto x^2-1 . \\ \lim\limits_{X\to} \sqrt{X} = & \to \text{La 2ème fonction est } X \mapsto \sqrt{X} . \end{cases}$$

2ème étape : je repère vers quoi tend x et je calcule la 1ère limite.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-1) = +\infty & \to \text{Le résultat est vers quoi tend } X . \\ \lim\limits_{X\to} \sqrt{X} = & \end{cases}$$

3ème étape : je place vers quoi tend X .

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = \end{cases}$$

4ème étape : je calcule la 2ème limite.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-1) = +\infty & \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty & \to \text{Le résultat est la réponse} \end{cases}$$

donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$.

---

2. La fonction composée est $x \mapsto 2x+1 \mapsto e^{2x+1}$.
La 2ème fonction est la fonction exponentielle.

- Limite en $-\infty$:

1ère étape : je place mes deux fonctions.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to} (2x+1) = & \to \text{La 1ère fonction est } x \mapsto 2x+1 . \\ \lim\limits_{X\to} e^X = & \to \text{La 2ème fonction est } X \mapsto e^X . \end{cases}$$

2ème étape : je repère vers quoi tend x et je calcule la 1ère limite.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty & \to \text{Le résultat est vers quoi tend } X . \\ \lim\limits_{X\to} e^X = & \end{cases}$$

3ème étape : je place vers quoi tend X .

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = \end{cases}$$

4ème étape : je calcule la 2ème limite.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty & \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 & \to \text{Le résultat est la réponse} \end{cases}$$

donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1} = 0$.

- Limite en $+\infty$:

1ère étape : je place mes deux fonctions.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to} (2x+1) = & \to \text{La 1ère fonction est } x \mapsto 2x+1 . \\ \lim\limits_{X\to} e^X = & \to \text{La 2ème fonction est } X \mapsto e^X . \end{cases}$$

2ème étape : je repère vers quoi tend x et je calcule la 1ère limite.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty & \to \text{Le résultat est vers quoi tend } X . \\ \lim\limits_{X\to} e^X = & \end{cases}$$

3ème étape : je place vers quoi tend X .

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = \end{cases}$$

4ème étape : je calcule la 2ème limite.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty \end{cases}$$ → Le résultat est la réponse

donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x+1} = +\infty$.

---

3. La fonction composée est $x \mapsto 1-x \mapsto (1-x)^5$.
La 2ème fonction est la fonction puissance 5.

- Limite en $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (1-x) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} X^5 = +\infty \end{cases}$$

donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} (1-x)^5 = +\infty$.

- Limite en $+\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} X^5 = -\infty \end{cases}$$ → Car l'exposant est impair.

donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} (1-x)^5 = -\infty$.

Vous avez plein de ∞ partout...
Comprenez bien le statut de chacun.

---

4. La fonction composée est $x \mapsto \frac{1}{x} \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
La 2ème fonction est la fonction cosinus. Restez calme...

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \cos X = 1 \end{cases}$$

donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

---

5. La fonction composée est $x \mapsto \frac{2x^2-1}{x^2+1} \mapsto \sqrt{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$.
La 2ème fonction est la fonction racine carrée.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+1} = ??? \\ \lim\limits_{X \to} \sqrt{X} = \end{cases}$$

Aïe ! La limite de $\frac{2x^2-1}{x^2+1}$ est une forme indéterminée qu'il faut traiter avant...
Il vaut mieux donc réfléchir au brouillon d'abord...

$$\frac{2x^2-1}{x^2+1} = \frac{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2-\frac{1}{x^2}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1 \end{cases}$$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+1} = \frac{2}{1} = 2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+1} = 2 \\ \lim\limits_{X \to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2} \end{cases}$$

donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{2x^2-1}{x^2+1}} = \sqrt{2}$.

---

6. La fonction composée est $x \mapsto \dfrac{1-2x}{1+2x} \mapsto \left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right)^7$.

La $2^{\text{ème}}$ fonction est la fonction puissance 7.

La limite de $\dfrac{1-2x}{1+2x}$ est une forme indéterminée que je commence par traiter.

$$\frac{1-2x}{1+2x} = \frac{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}{x\left(\frac{1}{x}+2\right)} = \frac{\frac{1}{x}-2}{\frac{1}{x}+2}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}-2\right) = -2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}+2\right) = 2 \end{cases}$$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-2x}{1+2x} = \dfrac{-2}{2} = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{1+2x} = -1 \\ \lim\limits_{X\to-1} X^7 = (-1)^7 = -1 \end{cases}$$

donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right)^7 = -1$.

---

7. La fonction composée est $x \mapsto 1-x \mapsto \mathrm{e}^{1-x}$.

La $2^{\text{ème}}$ fonction est la fonction exponentielle.

- Limite en $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty \end{cases}$$

donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{1-x} = +\infty$.

- Limite en $+\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{cases}$$

donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{1-x} = +\infty$.

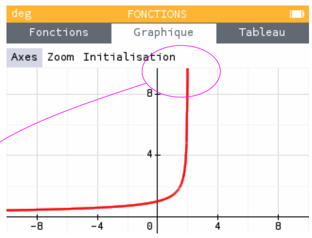
---

8. La fonction composée est $x \mapsto \dfrac{2}{2-x} \mapsto \sqrt{\dfrac{2}{2-x}}$.

La $2^{\text{ème}}$ fonction est la fonction racine carrée.

Mais, je dois voir que dénominateur tend vers 0 et demande donc une étude de signes.

x		2	
signes de $2-x$	+	0	−



$$\begin{cases} 2 \text{ positif} \\ \lim\limits_{\substack{x\to2 \\ x<2}} (2-x) = 0 \text{ avec } (2-x) \text{ positif} \end{cases}$$

→ Pas besoin d'une limite, 2 est constant.

donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ x<2}} \sqrt{\dfrac{2}{2-x}} = +\infty$.

---

9. La fonction composée est $x \mapsto 1-x^2 \mapsto (1-x^2)^6$.

La $2^{\text{ème}}$ fonction est la fonction puissance 6.

Limite en $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x^2) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} X^6 = +\infty \end{cases}$$

→ Car l'exposant est pair.

donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x^2)^6 = +\infty$.

---

10. • Limite en $-\infty$:

0 par composition

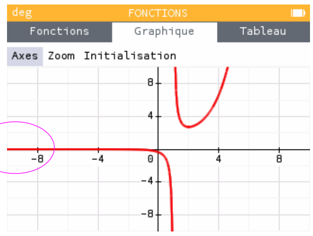
$-\infty$

Au brouillon : $\dfrac{e^{x-1}}{x-1}$ 0 $-\infty$ Attention, $\dfrac{(0)}{(-\infty)}$ n'est pas une forme indéterminée.

Pour le numérateur, la fonction composée est $x \mapsto x-1 \mapsto e^{x-1}$.
La 2ème fonction est la fonction exponentielle.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} = 0$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty \end{cases}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x-1}}{x-1} = 0$.



• Limite en 1 :

$e^0 = 1$ par composition

0

Au brouillon : $\dfrac{e^{x-1}}{x-1}$ $-\infty$ ou $+\infty$ 0

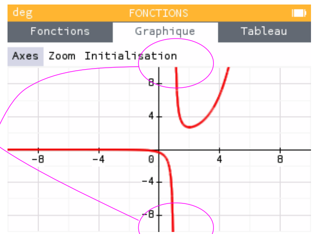
Le dénominateur tend vers 0 , il nous faut une étude des signes :

x	1	
signes de $x-1$	$-$ 0	$+$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1} (x-1) = 0 \\ \lim\limits_{X\to0} e^X = e^0 = 1 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to1} e^{x-1} = 1$.

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x<1}} e^{x-1} = 1 \text{ positif} \\ \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x<1}} (x-1) = 0 \text{ avec } x-1 \text{ négatif} \end{cases}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x<1}} \dfrac{e^{x-1}}{x-1} = -\infty$.

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x>1}} e^{x-1} = 1 \text{ positif} \\ \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x>1}} (x-1) = 0 \text{ avec } x-1 \text{ positif} \end{cases}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x>1}} \dfrac{e^{x-1}}{x-1} = -\infty$.



• Limite en $+\infty$:

$+\infty$ par composition

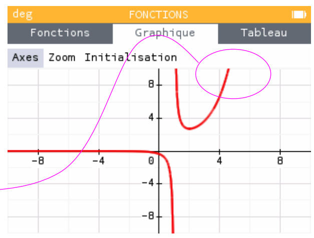
$+\infty$

Au brouillon : $\dfrac{e^{x-1}}{x-1}$ $+\infty$ **quotient indéterminé** $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$

Voilà une situation bien délicate...
C'est une forme indéterminée avec une exponentielle, on pense aux croissances comparées.
On voit un quotient, on pense plutôt à $\dfrac{e^x}{x}$.
Oui mais l'exposant et le dénominateur ne sont pas x , ce sont tous les deux $x-1$ ...
Vous voilà devant $\dfrac{e^X}{X}$ avec $X = x-1$.
Nous avons donc des croissances comparées mélangées avec une composition !!!

La fonction composée est $x \mapsto x-1 \mapsto \dfrac{e^{x-1}}{x-1}$.
La 2ème fonction est $X \mapsto \dfrac{e^X}{X}$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty \text{ par croissances comparées} \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x-1}}{x-1} = +\infty$.



---

11. • Limite en $-\infty$:

0 par composition

$-\infty$ $-\infty$

Au brouillon : $(2x+1)e^{2x+1}$ **produit indéterminé** $(-\infty)\times(0)$

C'est une forme indéterminée avec une exponentielle, on pense aux croissances comparées.
On voit un produit, on pense plutôt à $x\,e^x$.
L'exposant et le facteur sont tous les deux $2x+1$.
Nous reconnaissons $X\,e^X$ avec $X = 2x+1$.
Des croissances comparées mélangées avec une composition.

La fonction composée est $x \mapsto 2x+1 \mapsto (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x+1}$.
La $2^{\text{ème}}$ *fonction est* $X \mapsto X\,\mathrm{e}^{X}$.

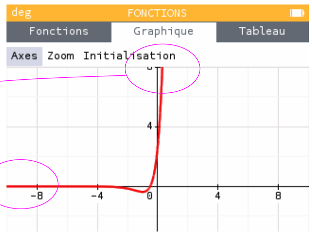
$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (2x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} X\,\mathrm{e}^{X} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x+1} = 0$.

- <u>Limite en $+\infty$</u> :

Au brouillon : $\overset{+\infty}{(2x+1)}\,\mathrm{e}^{\overset{+\infty}{2x+1}}$ $+\infty$ *par composition* $+\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x+1} = +\infty$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x+1} = +\infty \end{cases}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x+1} = +\infty$.



---

12. *La fonction composée est* $x \mapsto \cos x \mapsto \sqrt{\cos x}$.
La $2^{\text{ème}}$ *fonction est la fonction racine carrée.*

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1 \\ \lim\limits_{X \to 1} \sqrt{X} = 1 \end{cases}$

donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\cos x} = 1$.