Savoir DÉMONTRER QU'UNE SUITE DÉFINIE PAR RÉCURRENCE EST CONVERGENTE PUIS CALCULER SA LIMITE

Ce que je dois savoir faire

- **Conjecturer une limite à partir d'un tableau de valeurs ou d'un graphique.**
- **Démontrer une limite infinie par comparaison**, pour une suite qui se fait " pousser " par une autre
  - Même outil que pour les suites explicites de la fiche *SUI 02* :

    généralement avec une démonstration par récurrence,
    on vous a fait démontrer avant que, à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$.

    Si vous pouvez montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors, par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  - Même chose avec $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ pour montrer, par majoration, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- **Démontrer qu'une suite est convergente avec le théorème de convergence monotone**
  - On vous a fait démontrer avant que la suite est croissante ou décroissante.
    Généralement par récurrence, en montrant que, pour tout n , on a $u_{n+1} \geqslant u_n$ (ou $u_{n+1} \leqslant u_n$).
  - On vous a fait aussi démontrer que la suite est majorée ou minorée (ça peut même être les deux avec un encadrement du type $\dots \leqslant u_n \leqslant \dots$, on dit alors qu'elle est bornée).
    Là aussi, c'est généralement par récurrence.

  Remarque : Si, par exemple, on vous demande de démontrer que, pour tout n , on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, alors vous avez d'un seul coup la croissance et la majoration (et $0 \leqslant u_n$ se sert à rien) !
  - Alors, le théorème de convergence monotone affirme que la suite est convergente, c'est-à-dire qu'elle a une limite et que cette limite est un nombre réel (pas un ∞).

    Attention, on déduit que la suite a une limite, mais on n'a aucune information sur sa valeur.
- **Calculer la limite d'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$**
  - On vous a fait démontrer avant que la suite est convergente. On note souvent ℓ la limite inconnue.
  - Le raisonnement repose sur deux principes :
    - d'une part, en partant de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on obtient par opérations successives que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$;
    - d'autre part, les suites (u_n) et (u_{n+1}) ont la même limite, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.

    On en déduit l'équation $\ell = f(\ell)$, qu'il suffit de résoudre pour trouver ℓ .
  - Attention, il peut y avoir plusieurs solutions, mais une seule est la limite ! Il faut choisir...

Remarques sur les exercices

- Les exercices ① à ⑨ sont assez courts et permettent de s'entraîner sur des relations de récurrence variées.
- L'exercice ⑩ est un VRAI-FAUX, pour se reposer et réfléchir autrement.
- Les exercices ⑪ à ⑬ sont des type-bac un peu plus longs.
- Les exercices ⑭ et ⑮ sont plus difficiles : il faut gérer deux suites récurrentes imbriquées...

---

① Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1{,}5$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 4{,}5$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 9$.

c. Justifier que (u_n) est convergente.
Calculer sa limite ℓ .

② On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

D'après Baccalauréat S Polynésie 2012

---

③ Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et, pour tout entier n, $v_{n+1} = 0{,}25v_n^{\,2} + 1$.

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 2$.

b. Démontrer que (v_n) est croissante.

c. Montrer que (v_n) est convergente.

d. Calculer sa limite.

---

④ Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et, pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n^{\,2} + 1$.

a. Démontrer que, pour tout réel x, $x^2 + 1 \geqslant 2x$.

En déduire par récurrence que, si $n \geqslant 4$, alors $v_n \geqslant 2^n$.

b. En déduire la limite de (v_n).

---

⑤ On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

D'après Baccalauréat S Amérique du Nord 2013

---

⑥ On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

D'après Baccalauréat S Liban 2013

---

⑦ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

<u>Remarque</u> : Attention, ne cherchez pas à transformer $0 < u_n$ par opérations successives pour obtenir $\dfrac{3u_n}{1 + 2u_n}$.
C'est impossible…

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

d. Démontrer que la suite (u_n) converge.

D'après Baccalauréat S Polynésie 2013

⑧ Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n . \end{cases}$

a. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

c. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

D'après Baccalauréat S Antilles 2012

---

⑨ Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 1$.

Remarque : Attention, même problème que dans le ⑦, il est impossible de passer de u_n à $\dfrac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$ par opérations successives…

b. Établir que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
En déduire que la suite (u_n) converge.

D'après Baccalauréat S Asie 2013

---

⑩ *Dans cet exercice, pour chaque question, une affirmation est proposée. On demande d'indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte, mais toute trace de recherche sera valorisée.*

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n + 2$ pour tout entier naturel n .

Affirmation **: Cette suite est majorée par 3 .**

D'après Baccalauréat S Liban 2012

---

⑪ Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout entier naturel } n , \ u_{n+1} = \dfrac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n . \end{cases}$$

a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a $u_n > \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

e. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

D'après Baccalauréat S Antilles 2014

---

⑫ L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par
$u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n} \right)$ (*).

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

a. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]\, 0 \,; +\infty\, [$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{7}{x} \right)$.

Démontrer que la fonction f admet un minimum.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n > \sqrt{7}$.

b. Soit n un entier naturel quelconque.
Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

c. Déduire de la relation (*) une équation vérifiée par la limite ℓ de cette suite.
Déterminer ℓ .

D'après Baccalauréat S Métropole Septembre 2012

---

⑬ On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$.

Partie A : Conjecture

a. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2 .

b. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4 .

c. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 3$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.
En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .

d. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?

e. On note ℓ la limite de la suite (v_n) .
Montrer l'égalité $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.

Déterminer la valeur de ℓ .

f. Les conjectures faites dans la partie A sont-elles validées ?

D'après Baccalauréat S Amérique du Sud 2014

---

⑭ Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} .$$

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

$K \leftarrow 0$
$U \leftarrow 2$
$V \leftarrow 10$
Tant que $K < N$
    $K \leftarrow K + 1$
    $W \leftarrow U$
    $U \leftarrow \frac{2U + V}{3}$
    $V \leftarrow \frac{W + 3V}{4}$
Fin tant que

On exécute cet algorithme pour $N = 2$.
Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

K	W	U	V
0			
1			
2			

Remarque : C'est un tableau simplifié, il est conseillé de faire d'abord un tableau ligne par ligne.

Partie B

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = v_n - u_n$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

d. Déduire des résultats des questions **b.** et **c.** que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

e. En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

D'après Baccalauréat S Nouvelle Calédonie Novembre 2013

---

⑮ **a.** On considère l'algorithme suivant, dans lequel a est un réel strictement positif non nul, b est un réel strictement positif non nul tel que $b > a$, et N est un entier naturel non nul.

$u \leftarrow a$
$v \leftarrow b$
$n \leftarrow 0$
Tant que $n < N$
    $n \leftarrow n + 1$
    $u \leftarrow \frac{a+b}{2}$
    $v \leftarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
    $a \leftarrow u$
    $b \leftarrow v$
Fin du Tant que

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$.
Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\frac{{u_n}^2 + {v_n}^2}{2}}.$$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $(v_{n+1})^2 - (u_{n+1})^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.

d. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

e. Comparer $(v_{n+1})^2$ et $(v_n)^2$.

En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

f. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

D'après Baccalauréat S Asie 2012