Correction de **SUITES - Fiche 3**

Navigation vers les corrections : ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮

①

a. Posons $\mathscr{P}(n)$ la comparaison $u_{n+1} \geqslant u_n$.

- Initialisation :
  $\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_1 = 0{,}5\times 1{,}5 + 4{,}5 = 5{,}25 \end{cases}$ donc $u_1 \geqslant u_0$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier n quelconque.
  Alors :
  $u_{n+1} \geqslant u_n$ par hypothèse de récurrence
  donc $0{,}5u_{n+1} \geqslant 0{,}5u_n$
  donc $0{,}5u_{n+1} + 4{,}5 \geqslant 0{,}5u_n + 4{,}5$
  donc $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$
  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

b. Posons $\mathscr{Q}(n)$ la comparaison $u_n \leqslant 9$.

- Initialisation :
  $u_0 = 1{,}5 \leqslant 9$ donc $\mathscr{Q}(0)$ est vraie.

- Itération :
  Supposons $\mathscr{Q}(n)$ vraie pour un certain entier n quelconque.
  Alors :
  $u_n \leqslant 9$ par hypothèse de récurrence
  donc $0{,}5u_n \leqslant 0{,}5\times 9$
  donc $0{,}5u_{n+1} + 4{,}5 \leqslant 4{,}5 + 4{,}5$
  donc $u_{n+1} \leqslant 9$
  Donc $\mathscr{Q}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

On en déduit que (u_n) est décroissante.

c.

- $\begin{cases} \text{D'après la question } \textbf{a.}, (u_n) \text{ est croissante,} \\ \text{d'après la question } \textbf{b.}, (u_n) \text{ est majorée par } 9 . \end{cases}$
  donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

- Posons ℓ la limite de (u_n) .
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
  donc, par produit puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\,0{,}5u_n + 4{,}5\,) = 0{,}5\ell + 4{,}5$.
  D'autre part, (u_{n+1}) et (u_n) ont la même limite, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
  On en déduit : $\ell = 0{,}5\ell + 4{,}5$
  $\Leftrightarrow \ell = \dfrac{4{,}5}{0{,}5} = 9$
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 9$.

②

a. $u_1 = 3u_0 - 2\times 0 + 3 = 3$
$u_2 = 3u_1 - 2\times 1 + 3 = 10$

b. Posons $\mathscr{P}(n)$ la comparaison $u_n \geqslant n$.

- Initialisation :
  $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier n quelconque.
  Alors :
  $u_n \geqslant n$ par hypothèse de récurrence
  donc $3u_n \geqslant 3n$
  donc $3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3$
  donc $u_{n+1} \geqslant n + 3$
  donc $u_{n+1} \geqslant n + 1$
  Donc $\mathscr{P}(\,n+1\,)$ vraie.

- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

c. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \text{pour tout } n,\ u_n \geqslant n \end{cases}$

donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

---

③ **a.** Posons $\mathscr{P}(n)$ l'encadrement $0 \leqslant v_n \leqslant 2$.

- Initialisation :
  $v_0 = 0$ donc $0 \leqslant v_0 \leqslant 2$
  donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier n quelconque.
  Alors :
  $0 \leqslant v_n \leqslant 2$ par hypothèse de récurrence
  donc $0^2 \leqslant v_n^2 \leqslant 2^2$ car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$
  donc $0{,}25\times0 \leqslant 0{,}25\,v_n^2 \leqslant 0{,}25\times4$
  donc $0+1 \leqslant 0{,}25\,v_n^2+1 \leqslant 1+1$
  donc $1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$
  donc $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

b. Posons $\mathscr{Q}(n)$ la comparaison $v_{n+1} \geqslant v_n$.

- Initialisation :
  $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_1 = 0{,}25\times0^2+1 = 1 \end{cases}$ donc $v_1 \geqslant v_0$ et $\mathscr{Q}(0)$ est vraie.

- Itération :
  Supposons $\mathscr{Q}(n)$ vraie pour un certain entier n quelconque.
  Alors :
  $v_{n+1} \geqslant v_n$ par hypothèse de récurrence
  donc $v_{n+1}^2 \geqslant v_n^2$ car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$
  donc $0{,}25\,v_{n+1}^2 \geqslant 0{,}25\,v_n^2$
  donc $0{,}25\,v_{n+1}^2+1 \geqslant 0{,}25\,v_n^2+1$
  donc $v_{n+2} \geqslant v_{n+1}$

  Donc $\mathscr{Q}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

c. $\begin{cases} \text{D'après la question } \textbf{a.},\ (v_n) \text{ est majorée par } 2, \\ \text{d'après la question } \textbf{b.},\ (v_n) \text{ est croissante,} \end{cases}$
donc, d'après le théorème de convergence monotone, (v_n) est convergente.

d. Posons ℓ la limite de (v_n) .

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n^2 = \ell^2$

donc, par produit puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}25\,v_n^2+1) = 0{,}25\,\ell^2+1$.

D'autre part, (v_{n+1}) et (v_n) ont la même limite, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$.

On en déduit :

$\ell = 0{,}25\,\ell^2+1$

$\Leftrightarrow 0{,}25\,\ell^2-\ell+1 = 0$ → *Vous aurez peut-être vu que $0{,}25\,\ell^2-\ell+1$ vaut $(0{,}5\,\ell-\ell)^2$ et gagné du temps.*

$\Delta = (-1)^2 - 4\times0{,}25\times1 = 0$ → *Pour ceux qui ne l'auraient pas vu...*

donc il n'y a qu'une solution $-\dfrac{-1}{2\times0{,}25} = 2$. → *Très bonne nouvelle qu'il n'y ait pas deux solutions : on n'a pas à choisir !*

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

---

④ **a.**
- Pour tout réel x :
  $x^2+1-2x = (x-1)^2 \geqslant 0$ car un carré est toujours positif
  donc $x^2+1 \geqslant 2x$.

Posons $\mathscr{P}(n)$ la comparaison $v_n \geqslant 2^n$.

- <u>Initialisation</u> :
  $v_1 = 0^2 + 1 = 1$
  $v_2 = 1^2 + 1 = 2$
  $v_3 = 2^2 + 1 = 5$
  $v_4 = 5^2 + 1 = 26$

  D'autre part, $2^4 = 16$, donc $v_4 \geqslant 2^4$.
  Donc $\mathscr{P}(4)$ est vraie.

- <u>Itération</u> :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geqslant 4$ quelconque.
  Alors :
  $v_n \geqslant 2^n$ par hypothèse de récurrence
  donc $v_n^2 \geqslant (2^n)^2$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}+$
  donc $v_n^2 + 1 \geqslant (2^n)^2 + 1$
  donc $v_{n+1} \geqslant 2\times 2^n$ car, d'après $(2^n)^2 + 1 \geqslant 2\times 2^n$ en appliquant $x^2 + 1 \geqslant 2x$ à $x = 2^n$
  donc $v_{n+1} \geqslant 2^{n+1}$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- <u>Conclusion</u> :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

b. $\begin{cases} 2 > 1 \text{ donc } \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \\ \text{pour tout } n\text{ , } v_n \geqslant 2^n \end{cases}$

donc, par comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

---

⑤ **a.** On pose $\mathscr{P}(n) : 0 < u_n \leqslant 2$, l'encadrement à démontrer.

- <u>Initialisation</u> :
  $u_0 = 1 \Rightarrow 0 < u_0 \leqslant 2$,
  donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- <u>Itération</u> :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier non nul n quelconque.
  Alors :

  $0 < u_n \leqslant 2$ par hypothèse de récurrence
  donc $2\times 0 < 2u_n \leqslant 2\times 2$
  donc $0 < 2u_n \leqslant 4$
  donc $\sqrt{0} < \sqrt{2u_n} \leqslant \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}$
  donc $0 < u_{n+1} \leqslant 2$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- <u>Conclusion</u> :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

b. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n$ → Pas d'indication d'une démonstration par récurrence. Pas besoin...

$= \sqrt{2}\sqrt{u_n} - u_n$

$= \sqrt{u_n}\ (\sqrt{2} - \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n}})$ → Pour étudier un signe, je factorise.

$= \sqrt{2}\sqrt{u_n} - \dfrac{\sqrt{u_n}\cancel{\sqrt{u_n}}}{\cancel{\sqrt{u_n}}}$ → N'oubliez pas que, pour tout x positif, on peut écrire $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$.

$= \sqrt{u_n}\ (\sqrt{2} - \sqrt{u_n}\ )$

D'après la question précédente :

$u_n \leqslant 2$ → Il fallait penser à utiliser une partie de la question précédente !
donc $\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{2}$ car la fonction racine carrée est croissante
donc $\sqrt{2} - \sqrt{u_n} \geqslant 0$.

D'autre part, $\sqrt{u_n} \geqslant 0$. → On a même $\sqrt{u_n} > 0$ car $u_n > 0$.
On en déduit :
$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

Et donc (u_n) est croissante.

c. $\begin{cases} \text{D'après la question } \textbf{a.}\text{ , } (u_n) \text{ majorée par } 2\text{ ,} \\ \text{d'après la question } \textbf{b.}\text{ , } (u_n) \text{ croissante,} \end{cases}$

donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

⑥ **a.** On pose $\mathscr{P}(n) : 0 < v_n < 3$, l'encadrement à démontrer.

- Initialisation :
  $v_0 = 1 \Rightarrow 0 < v_0 < 3$,
  donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un entier non nul n quelconque.
  Alors :

  $0 < v_n < 3$ par hypothèse de récurrence
  donc $0 > -v_n > -3$
  donc $6 > 6 - v_n > 6 - 3$
  donc $\frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3}$ car la fonction racine inverse est décroissante sur $\mathbb{R}+*$
  donc $\frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3}$
  donc $0 < v_{n+1} < 3$
  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

b. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6 - v_n)}{6 - v_n} = \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$

$\begin{cases} (3 - v_n)^2 \text{ toujours positif} \\ v_n < 3 \Rightarrow v_n < 6 \Rightarrow 6 - v_n > 0 \end{cases}$ et donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$

On en déduit que (v_n) est croissante.

c. $\begin{cases} \text{D'après la question } \mathbf{a.}, (v_n) \text{ majorée par } 3, \\ \text{d'après la question } \mathbf{b.}, (v_n) \text{ croissante,} \end{cases}$

donc, d'après le théorème de convergence monotone, (v_n) est convergente.

---

⑦ **a.** $u_1 = \frac{3u_0}{1 + 2u_0} = \frac{3\times\frac{1}{2}}{1 + 2\times\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$

$u_2 = \frac{3u_1}{1 + 2u_1} = \frac{3\times\frac{3}{4}}{1 + 2\times\frac{3}{4}} = \frac{9}{10}$

b. On pose $\mathscr{P}(n) : 0 < u_n$, la comparaison à démontrer.

- Initialisation :
  $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 < u_0$,
  donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Attention, on ne peut pas transformer par opérations successives u_n en $\frac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un entier non nul n quelconque.
  Alors :
  $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence
  donc $\begin{cases} 3u_n > 0 \\ 1 + 2u_n > 0 \end{cases}$ et donc, par quotient $\frac{3u_n}{1 + 2u_n} > 0$. → *Mais on a simplement un numérateur et un dénominateur positifs...*

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

c. *L'avertissement ne donne pas envie de se lancer dans une démonstration par récurrence. Tentons la démonstration directe :*

Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} - u_n = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} - \frac{u_n(1 + 2u_n)}{1 + 2u_n}$$

$$= \frac{3u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n}$$
$$= \frac{u_n(3+1+2u_n)}{1+2u_n}$$
$$= \frac{u_n(4+2u_n)}{1+2u_n}$$

Or , $u_n > 0$ donc $\begin{cases} u_n > 0 \\ 4+2u_n > 0 \\ 1+2u_n > 0 \end{cases}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc $u_{n+1} > u_n$.

On en déduit que (u_n) est croissante.

Remarquons que les questions **b.** et **c.** auraient pu être faites par récurrence à l'aide d'une fonction :

Posons la fonction f définie sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$. → C'est la fonction qui fait passer de u_n à u_{n+1} .

f de la forme $\frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x \text{ et } u'(x) = 3 \\ v(x) = 1+2x \text{ et } v'(x) = 2 \end{cases}$

donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

donc $f'(x) = \frac{3(1+2x) - 3\times 2}{(1+2x)^2}$

$= \frac{3}{(1+2x)^2}$ toujours positif

donc f croissante sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

C'est vrai que c'est un peu long et qu'on a l'impression de perdre du temps.
Mais vous allez le gagner dans les itérations de vos démonstrations par récurrence :

b. …

- Itération :
  Supposons …

  $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence

  donc $f(u_n) > f(0)$ car f croissante sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$

  donc $u_{n+1} > 0$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

…

c. …

- Itération :
  Supposons …

  $u_n < u_{n+1}$ par hypothèse de récurrence

  donc $f(u_n) < f(u_{n+1})$ car f croissante sur $]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$ → Remarquons qu'on peut appliquer f car les u_n sont positifs.

  donc $u_{n+1} < u_{n+2}$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

…

Le jour du bac, on n'attendra pas que vous pensiez à poser une fonction, on vous la donnera si on veut vous faire utiliser cette méthode.

d. $\begin{cases} \text{D'après l'énoncé, } (u_n) \text{ majorée par } 1 \text{ ,} \\ \text{d'après la question } \textbf{c.} \text{ , } (u_n) \text{ croissante,} \end{cases}$

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

---

⑧ **a.** $u_2 = \frac{1+1}{2\times 1} \times u_0 = \frac{1}{2}$

$u_3 = \frac{2+1}{2\times 2} \times u_1 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$u_4 = \frac{3+1}{2\times 3} \times u_2 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$

b. On pose $\mathscr{P}(n) : u_n > 0$, la comparaison à démontrer.

- Initialisation :
  $u_1 = \frac{1}{2}$ donc $u_1 > 0$,
  donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un entier non nul n quelconque.
  Alors :
  $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence.
  De plus $\dfrac{n+1}{2n} > 0$ donc, par produit $\dfrac{n+1}{2n}u_n > 0$.
  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.
- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

c.

- Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2n}u_n - u_n = \left(\frac{n+1}{2n} - 1\right)u_n = \frac{n+1-2n}{2n}u_n = \frac{1-n}{2n}u_n$$

Or, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\begin{cases} 1-n \leqslant 0 \\ 2n > 0 \\ u_n > 0 \end{cases}$,

donc, par quotient et produit, $\dfrac{1-n}{2n}u_n \leqslant 0$,

donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$.

On en déduit que (u_n) est décroissante.

Vous aurez peut-être pensé à démontrer $u_n \geqslant u_{n+1}$ par récurrence...
Mais il y a une difficulté pour l'itération.
On passe facilement de $u_n \geqslant u_{n+1}$ à $\dfrac{n+1}{2n}u_n \geqslant \dfrac{n+1}{2n}u_{n+1}$.
Mais il faut démontrer que $\dfrac{n+1}{2n} > \dfrac{n+2}{2(n+1)}$
pour passer à $\dfrac{n+1}{2n}u_n \geqslant \dfrac{n+2}{2(n+1)}u_{n+1}$.

- $\begin{cases} \text{D'après la question } \textbf{b.}, \ (u_n) \text{ est strictement positive donc minorée par } 0, \\ (u_n) \text{ décroissante,} \end{cases}$
  Donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

---

⑨ **a.** On pose $\mathscr{P}(n)$ la comparaison $u_n > 1$.

- Initialisation :
  $u_0 = 2$ donc $u_0 > 1$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un entier non nul n quelconque.
  Alors :
  $u_n > 1$ par hypothèse de récurrence.
  Étudions le signe de $u_{n+1} - 1$:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - 1 = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - \frac{3+u_n}{3+u_n} = \frac{-2+2u_n}{3+u_n}$$

Attention, à cause du quotient, on ne peut pas transformer par opérations successives $u_n > 1$ en $\dfrac{1+3u_n}{3+u_n} > 1$.

Or, $\begin{cases} u_n > 1 \Rightarrow 3+u_n > 4 \Rightarrow 3+u_n > 0 \\ u_n > 1 \Rightarrow 2u_n > 2 \Rightarrow -2+2u_n > 0 \end{cases}$ donc, par quotient, $\dfrac{-2+2u_n}{3+u_n} > 0$ et donc $u_{n+1} > 1$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

b. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - \frac{u_n(3+u_n)}{3+u_n} = \frac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \frac{1-u_n^2}{3+u_n} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$$

c.

- Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_n > 1 \Rightarrow -u_n < -1 \Rightarrow 1-u_n < 0 \\ u_n > 1 \Rightarrow 1+u_n > 2 \Rightarrow 1+u_n > 0 \\ u_n > 1 \Rightarrow 3+u_n > 4 \Rightarrow 3+u_n > 0 \end{cases}$$

donc, par produit et quotient, $\dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n} < 0$,

donc $u_{n+1} < u_n$.

On en déduit que (u_n) est décroissante.

- $\left\{\begin{array}{l}\text{D'après la question } \textbf{a.}\text{, } (u_n) \text{ est minorée par } 1,\\ (u_n) \text{ décroissante,}\end{array}\right.$

  Donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

---

⑩ La première chose à faire est de calculer quelques termes pour conjecturer :

$u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{7}{3} = 2{,}33\ldots$, $u_2 = \dfrac{25}{9} = 2{,}77\ldots$, $u_3 = \dfrac{79}{27} = 2{,}92\ldots$, $u_4 = \dfrac{241}{81} = 2{,}97\ldots$, etc.

On peut penser que c'est vrai mais il reste à le démontrer.

On pose $\mathscr{P}(n) : u_n < 3$, la majoration à démontrer.

- Initialisation :
  $u_0 = 1 < 3$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vrai.
- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un entier non nul n quelconque.
  Alors :
  $u_n < 3$ par hypothèse de récurrence
  donc $\dfrac{1}{3}u_n < \dfrac{1}{3} \times 3$
  donc $\dfrac{1}{3}u_n + 2 < 1 + 2$
  donc $u_{n+1} < 3$
  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.
- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

L'affirmation est donc vraie.

---

⑪ **a.** Le plus efficace est d'entrer la suite dans sa calculatrice et de faire afficher un tableau de valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,186	0,6122	0,30994	0,155738	0,0780226	0,03904202

Si vous êtes au point en algorithmes, vous pouvez aussi en utiliser un pour calculer les termes successifs, avec une boucle `Pour…` ou une boucle `Tant que…` .

b. On peut conjecturer que la suite est décroissante à partir du rang 1.

c. On pose $\mathscr{P}(n) : u_n > \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$, la comparaison à démontrer.

- Initialisation :
  $\left\{\begin{array}{l} u_1 = 3{,}4 \\ \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^1 = 1{,}875 \end{array}\right.$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vrai. → Attention ! n est non nul, on commence à 1 .
- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un entier non nul n quelconque.
  Alors :
  $u_n > \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$ par hypothèse de récurrence
  donc $\dfrac{1}{5}u_n > \dfrac{1}{5} \times \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$
  donc $\dfrac{1}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n > \dfrac{3}{4} \times 0{,}5^n + 3\times 0{,}5^n$
  donc $u_{n+1} > (\dfrac{3}{4} + 3) \times 0{,}5^n$
  donc $u_{n+1} > \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$
  donc $u_{n+1} > \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n \times 0{,}5$ → u_n est plus grand que $\dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$ qui est plus grand que $\dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$ multiplié par $0{,}5$.
  On a donc bien : $u_{n+1} > \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$.
  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.
- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

d. Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5} u_n + 3\times 0{,}5^n - u_n$$ → Pas question de se lancer dans une démonstration par récurrence ! On nous dit d'utiliser la question précédente.

$$= 3\times 0{,}5^n - \frac{4}{5} u_n$$

donc $u_{n+1} - u_n < 3\times 0{,}5^n - \frac{4}{5}\left(\frac{15}{4}\times 0{,}5^n\right)$ d'après la question *c)* → Attention au changement de sens à cause du $-$.

donc $u_{n+1} - u_n < 3\times 0{,}5^n - 3\times 0{,}5^n = 0$

donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

e. $\left\{ \begin{array}{l} \text{D'après la question } \textbf{d.}\text{ , } (u_n) \text{ décroissante,} \\ \text{d'après la question } \textbf{c.}\text{ , } u_n > \frac{15}{4}\times 0{,}5^n \text{ avec } \frac{15}{4}\times 0{,}5^n > 0 \text{ , donc } (u_n) \text{ minorée par } 0 \text{ ,} \end{array} \right.$

donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

---

⑫ **a.** « Minimum de fonction » ?

Je pense alors à « décroissante puis croissante » , puis à « variations » et donc à « fonction dérivée » :

- f de la forme $\frac{1}{2}(u+v)$ avec $\left\{ \begin{array}{l} u : x \mapsto x \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = 1 \\ v : x \mapsto \frac{7}{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } v'(x) = \frac{-7}{x^2} . \end{array} \right.$

  Donc f dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $f' = \frac{1}{2}(u' + v')$.

  Donc $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{x^2}\right)$

  $= \frac{1}{2}\,\frac{x^2 - 7}{x^2}$

- x^2 et $\frac{1}{2}$ sont toujours strictement positifs sur $]\,0\,;+\infty\,[$

  donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 7$, qui est du signe de son coefficient dominant 1 positif à l'extérieur de ses racines $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.

x	0		$\sqrt{7}$		$+\infty$
signes de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de $f(x)$	‖	↘	$\sqrt{7}$	↗	

$f(\sqrt{7}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \frac{7}{\sqrt{7}}\right) = \sqrt{7}$

On en déduit que f admet pour minimum $\sqrt{7}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

On demande d'en déduire que $u_n > \sqrt{7}$.

<u>Méthode 1</u> : On a l'habitude d'utiliser une fonction croissante dans les démonstrations par récurrence

Montrons par récurrence la comparaison $\mathscr{P}(n) : u_n > \sqrt{7}$.

- <u>Initialisation</u> :
  $u_0 = 3 > \sqrt{7}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- <u>Itération</u> :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier n quelconque.

  $u_n > \sqrt{7}$ par hypothèse de récurrence

  donc $f(u_n) > f(\sqrt{7})$ car, d'après la question *a)* , f strictement croissante sur $]\,\sqrt{7}\,;+\infty\,[$

  donc $\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) > \sqrt{7}$ car, d'après la question *a)* , $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$

  donc $u_{n+1} > \sqrt{7}$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.
- <u>Conclusion</u> :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

<u>Méthode 2</u> : C'est aussi une démonstration par récurrence mais qui utilise uniquement le minimum, pas la croissance... Regardez bien...

Montrons par récurrence la comparaison $\mathscr{P}(n) : u_n > \sqrt{7}$.

- <u>Initialisation</u> :
  $u_0 = 3 > \sqrt{7}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- <u>Itération</u> :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier n quelconque.

  $u_n > \sqrt{7}$ par hypothèse de récurrence

  donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est l'image d'un nombre appartenant à $]\,0\,;+\infty\,[$

  Comme $\sqrt{7}$ est le minimum de la fonction f sur $]\,0\,;+\infty\,[$, cette image est supérieure à $\sqrt{7}$.

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

b.
- Pour tout n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) - u_n$$ → *Pas très sympathique... courage...*

$$= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}\frac{7}{u_n} - u_n$$

$$= \frac{1}{2}\frac{7}{u_n} - \frac{1}{2}u_n$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{u_n} - u_n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{7-u_n^2}{u_n}$$ → *Pour une étude de signes, il me faut la forme factorisée.*

D'après la question **b.** :

$u_n > \sqrt{7}$

donc $u_n^2 > (\sqrt{7})^2$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}+$

donc $u_n^2 > 7$

donc $7 - u_n^2 < 0$

Comme de plus $u_n > 0$, on a $u_{n+1} - u_n < 0$.

- On en déduit que (u_n) est décroissante.
  De plus, d'après la question **b.** , elle est minorée par $\sqrt{7}$.
  Donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{u_n} = \frac{7}{\ell}$

donc, par somme et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right)$.

D'autre part, (u_{n+1}) et (u_n) ont la même limite, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.

On en déduit :

$$\frac{1}{2}\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right) = \ell$$

$$\Leftrightarrow \ell + \frac{7}{\ell} = 2\ell$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{\ell} - \ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7-\ell^2}{\ell} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7 - \ell^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = \sqrt{7} \text{ ou } \ell = -\sqrt{7}$$

Tous les termes u_n sont strictement positifs, donc la limite ne peut pas être négative.

Donc $\ell = \sqrt{7}$.

---

⑬ ***Partie A***

a. $u_1 = -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\times 2^2 + 3\times 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$u_2 = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3\times\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{23}{8}$

b. $u_3 = -\frac{1}{2}u_2^2 + 3u_2 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\times\left(\frac{23}{8}\right)^2 + 3\times\frac{23}{8} - \frac{3}{2} = \frac{383}{128} \approx 2{,}99219$

$u_2 = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\times\left(\frac{383}{128}\right)^2 + 3\times\frac{383}{128} - \frac{3}{2} = \frac{98\,303}{32\,768} \approx 2{,}99997$

c. On peut conjecturer que la suite est croissante et qu'elle converge vers 3 .

Partie B

a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$$

$$= -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3$$

$$= -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right)$$

$$= -\frac{1}{2}v_n^2$$

b. On pose $\mathscr{P}(n) : -1 \leqslant v_n \leqslant 0$, l'encadrement à démontrer.

- Initialisation :
  $v_0 = u_0 - 3 = -1$
  donc $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$
  donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier n quelconque.
  Alors :
  $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ par hypothèse de récurrence
  donc $(-1)^2 \geqslant v_n^2 \geqslant 0^2$ car la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}+$ → Avez-vous été vigilants ? Nous sommes sur les négatifs...
  donc $-\frac{1}{2} \times 1 \leqslant -\frac{1}{2} v_n^2 \leqslant -\frac{1}{2} \times 0$
  donc $-\frac{1}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 0$
  donc $-1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 0$
  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

c.
- Pour tout n :
  $$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2} v_n^2 - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2} v_n + 1 \right)$$

- $\begin{cases} -1 \leqslant v_n \leqslant 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} v_n \leqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} v_n + 1 \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{2} v_n + 1 \text{ est positif} \\ v_n \leqslant 0 \Rightarrow -v_n \text{ est positif.} \end{cases}$

  donc, pour tout n , $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et donc $v_{n+1} \geqslant v_n$.

  On en déduit que (v_n) est croissante.

d. $\begin{cases} (v_n) \text{ est croissante,} \\ \text{d'après la question } \mathbf{b.}\text{, elle est majorée par } 0 \text{,} \end{cases}$

donc, d'après le théorème de convergence monotone, (v_n) est convergente.

e. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$

donc, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{2} v_n^2 = -\frac{1}{2} \ell^2$

D'autre part, (v_{n+1}) et (v_n) ont la même limite, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+1} = \ell$.

On en déduit $\ell = -\frac{1}{2} \ell^2$.

On a alors :

$$\ell + \frac{1}{2} \ell^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \ell \left(1 + \frac{1}{2} \ell \right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } 1 + \frac{1}{2} \ell = 0$$
$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = -2$$

Tous les termes v_n sont dans $[-1 ; 0]$ donc la limite ne peut être -2 .
Donc $\ell = 0$.

f.
- Pour tout n ,
  $v_{n+1} \geqslant v_n$
  donc $v_{n+1} + 3 \geqslant v_n + 3$
  et donc $u_{n+1} \geqslant u_n$.

  On en déduit que (u_n) est décroissante.

- $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 \\ \text{pour tout } n \text{, } u_n = v_n + 3 \end{cases}$

  donc, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 + 3 = 3$.

Les conjectures sont donc validées.

⑭ ***Partie A***

On peut d'abord remplir un tableau ligne par ligne :

Numéro de ligne	Test	K	W	U	V
L1		0			
L2		0		2	
L3		0		2	10
L4	VRAI (0 < 2)	0		2	10
L5		1		2	10
L6		1	2	2	10
L7		1	2	14/3	10
L8		1	2	14/3	8
L4	VRAI (1 < 2)	1	2	14/3	8
L5		2	2	14/3	8
L6		2	14/3	14/3	8
L7		2	14/3	52/9	8
L8		2	14/3	52/9	43/6
L4	FAUX (2 = 2)	2	14/3	52/9	43/6
L9		2	14/3	52/9	43/6

On en déduit la version simplifiée :

K	*W*	*U*	*V*
0		2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

Partie B

a. Pour tout entier naturel n non nul :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3}$$

→ Pas besoin d'une démonstration par récurrence avec l'expression en fonction de u_n et de v_n .

$$= \frac{3u_n + 9v_n}{12} - \frac{8u_n + 4u_n}{12}$$

$$= \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4u_n}{12}$$

→ Attention aux signes...

$$= \frac{-5u_n + 5v_n}{12}$$

$$= \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

b. Pour tout entier naturel n non nul :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$$

→ D'après la forme attendue, on se doute que (w_n) est géométrique.

$$= \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

$$= \frac{5}{12} w_n$$

Donc, (w_n) est géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

On en déduit que, pour tout entier n , $w_n = 8\times(\frac{5}{12})^n$.

c.

- Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3}$$

Or, $w_n = 8\times(\frac{5}{12})^n > 0$,

donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc $u_{n+1} > u_n$.

On en déduit que (u_n) est croissante.

- Pour tout entier naturel n non nul :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4}$$

donc $v_{n+1} - v_n < 0$ et donc $v_{n+1} < v_n$.

On en déduit que (v_n) est décroissante.

d.

- Pour tout entier naturel n non nul :
$\begin{cases} v_n - u_n = w_n \text{ avec } w_n > 0 \text{, donc } v_n > u_n \\ \text{comme } (v_n) \text{ est décroissante, on a nécessairement } v_0 > v_n . \end{cases}$
On en déduit que $v_0 > u_n$, et donc $u_n \leqslant 10$.
- De même, pour tout entier naturel n non nul :
$\begin{cases} v_n > u_n \\ \text{comme } (u_n) \text{ est croissante, on a nécessairement } u_0 < u_n . \end{cases}$
On en déduit que $u_0 < v_n$, et donc $v_n \geqslant 2$.

e.

- $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (u_n) \text{ est majorée par } 10 , \end{cases}$
donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.
- $\begin{cases} (v_n) \text{ est décroissante} \\ (v_n) \text{ est minorée par } 2 , \end{cases}$
donc, d'après le théorème de convergence monotone, (v_n) est convergente.

---

⑮ **a.** On peut d'abord remplir un tableau en avançant ligne par ligne :

Numéro de ligne	Test	n	a	b	u	v
L1			4	9	4	
L2			4	9	4	9
L3		0	4	9	4	9
L4	VRAI (0 < 2)	0	4	9	4	9
L5		1	4	9	4	9
L6		1	4	9	6,5	9
L7		1	4	9	6,5	6,964
L8		1	6,5	9	6,5	6,964
L9		1	6,5	6,964	6,5	6,964
L4	VRAI (1 < 2)	1	6,5	6,964	6,5	6,964
L5		2	6,5	6,964	6,5	6,964
L6		2	6,5	6,964	6,732	6,964
L7		2	6,5	6,964	6,732	6,736
L8		2	6,732	6,964	6,732	6,736
L9		2	6,732	6,736	6,732	6,736
L4	FAUX (2 = 2)	2	6,732	6,736	6,732	6,736
L10		2	6,732	6,736	6,732	6,736

On en déduit la version simplifiée :

n	a	b	u	v
0	4	9	4	9
1	6,5	6,964	6,5	6,964
2	6,732	6,736	6,732	6,736

b. On pose $\mathscr{P}(n) : \begin{cases} u_n > 0 \\ v_n > 0 \end{cases}$, les deux comparaisons à démontrer.

- Initialisation :
$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}$ avec $0 < a < b$
donc $\begin{cases} u_0 > 0 \\ v_0 > 0 \end{cases}$ et donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Itération :
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier n quelconque.
  - Alors, d'une part :
  $\begin{cases} u_n > 0 \\ v_n > 0 \end{cases}$ par hypothèse de récurrence
  donc $\dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$ et donc $u_{n+1} > 0$.
  - D'autre part, une racine carrée est toujours positive donc $\sqrt{\dfrac{u_n^{\,2} + v_n^{\,2}}{2}} \geqslant 0$.
  Et comme u_n et v_n sont non nuls, $\sqrt{\dfrac{u_n^{\,2} + v_n^{\,2}}{2}} > 0$.
  Donc $v_{n+1} > 0$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

c.
- Pour tout n :

$$\begin{aligned}(v_{n+1})^2-(u_{n+1})^2 &= \left(\sqrt{\frac{u_n{}^2+v_n{}^2}{2}}\right)^2-\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^2\\ &= \frac{u_n{}^2+v_n{}^2}{2}-\frac{u_n{}^2+2u_nv_n+v_n{}^2}{4}\\ &= \frac{2u_n{}^2+2v_n{}^2-u_n{}^2-2u_nv_n-v_n{}^2}{4}\\ &= \frac{u_n{}^2-2u_nv_n+v_n{}^2}{4}\\ &= \left(\frac{u_n-v_n}{2}\right)^2\end{aligned}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $(v_{n+1})^2-(u_{n+1})^2$ est un carré

  donc $(v_{n+1})^2-(u_{n+1})^2 \geqslant 0$

  donc $(v_{n+1})^2 \geqslant (u_{n+1})^2$

  donc $\sqrt{(v_{n+1})^2} \geqslant \sqrt{(u_{n+1})^2}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$

  donc $v_{n+1} \geqslant u_{n+1}$

  Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n \geqslant u_n$.

  Or, $\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}$ avec $a < b$.

  Donc, cette comparaison est vraie également pour $n = 0$.

  On a bien $v_n \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. Pour tout n :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \frac{u_n+v_n}{2}-u_n\\ &= \frac{u_n+v_n-2u_n}{2}\\ &= \frac{v_n-u_n}{2}\end{aligned}$$

Or, $v_n \geqslant u_n$ donc $\dfrac{v_n-u_n}{2} \geqslant 0$ donc $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} \geqslant u_n$.

On en déduit que (u_n) est croissante.

e. Pour tout n :

$$\begin{aligned}(v_{n+1})^2-(v_n)^2 &= \left(\sqrt{\frac{u_n{}^2+v_n{}^2}{2}}\right)^2-(v_n)^2\\ &= \frac{u_n{}^2+v_n{}^2}{2}-(v_n)^2\\ &= \frac{u_n{}^2+v_n{}^2-2v_n{}^2}{2}\\ &= \frac{u_n{}^2-v_n{}^2}{2}\end{aligned}$$

On a vu dans les questions **a.** et **c.** que $v_n \geqslant u_n > 0$.
On en déduit que $v_n{}^2 \geqslant u_n{}^2$ puisque la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}+$.

Alors, $(v_{n+1})^2-(v_n)^2 \leqslant 0$ et donc $(v_{n+1})^2 \leqslant (v_n)^2$.
Donc $\sqrt{(v_{n+1})^2} \leqslant \sqrt{(v_n)^2}$ et donc $v_{n+1} \leqslant v_n$.
On en déduit que (v_n) est décroissante.

f.
- (v_n) est décroissante
  donc, pour tout n , $v_n \leqslant v_0$.
  De plus, pour tout n , $u_n \leqslant v_n$.
  On en déduit que pour tout n , $u_n \leqslant v_0$.

  $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante,} \\ (u_n) \text{ est majorée par } v_0 \text{,} \end{cases}$

  donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

- (u_n) est croissante
  donc, pour tout n , $u_n \geqslant u_0$.
  De plus, pour tout n , $u_n \leqslant v_n$.
  On en déduit que pour tout n , $v_n \geqslant u_0$.

  $\begin{cases} (v_n) \text{ est décroissante,} \\ (v_n) \text{ est minorée par } u_0 \text{,} \end{cases}$

  donc, d'après le théorème de convergence monotone, (v_n) est convergente.