Savoir CALCULER LA LIMITE D'UNE SUITE EXPLICITE

Ce que vous devez savoir faire

- **Conjecturer une limite à partir d'un tableau de valeurs ou d'un graphique**
- **Calculer la limite d'une suite définie sous forme explicite $u_n = f(n)$**
  - La question est posée directement, sans démonstrations préalables.
  - Il faut connaître les limites usuelles : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

    et $\begin{cases} \text{si } q > 1 \text{, alors } \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty \\ \text{si } -1 < q < 1 \text{, alors } \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0 . \end{cases}$
  - On applique ensuite les opérations sur les limites (en signalant « *par somme* », « *par produit* », « *par inverse* » ou « *par quotient* »).

    La limite peut être finie (un nombre) ou infinie ($+\infty$ ou $-\infty$).
  - On peut en particulier en déduire les limites des suites géométriques : la limite de $u_0 \times q^n$ dépend de la position de q par rapport à 1 et -1, mais aussi du signe de u_0 .
  - Attention aux inverses de limites (et donc aussi aux quotients)…
    - si $\lim\limits_{n\to+\infty} \bigstar = +\infty$ ou si $\lim\limits_{n\to+\infty} \bigstar = -\infty$, alors, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\bigstar} = 0$;
    - mais si $\lim\limits_{n\to+\infty} \bigstar = 0$, alors, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\bigstar}$ peut valoir $+\infty$ ou $-\infty$ selon de signe de $\bigstar$

      (ou même ne pas exister si $\bigstar$ tend vers 0 par valeurs alternées supérieures et inférieures !).
  - Il faut reconnaître les formes indéterminées $(+\infty)+(-\infty)$ ou $(+\infty)-(+\infty)$, $(0)\times(\infty)$, $\frac{(0)}{(0)}$ ou $\frac{(\infty)}{(\infty)}$

    et les " lever " en **transformant l'expression** :
    - la technique la plus courante : pour les **polynômes** et **quotients de polynômes**, factoriser par un terme n^k , souvent le terme de plus haut degré (et donc factorisation forcée), mais pas toujours ;
    - plus rare, pour les **sommes de racines** : il faut penser à multiplier par la quantité conjuguée.

    Remarque : Les notations $(+\infty)$, $(+\infty)$ et (0) ne sont pas autorisées sur une copie !

- **Démontrer une limite infinie par minoration ou majoration**, pour une suite qui se fait " pousser " par une autre
  - On vous a fait démontrer avant que, à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$.

    Si vous pouvez montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors, par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  - Même chose avec $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ pour montrer, par majoration, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- **Démontrer une limite finie par encadrement**, pour une suite " coincée " entre deux autres
  - On vous a fait démontrer avant que, à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.

    Si vous pouvez montrer que v_n et w_n ont la même limite ℓ , alors, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

    On peut aussi invoquer le « théorème des gendarmes ».

  Remarque : Parfois, vous devez parfois trouver vous-même la minoration, la majoration ou l'encadrement.
  Retenez alors les trois encadrements classiques pour démarrer ces méthodes :
  - $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$
  - $\begin{cases} -1 \leqslant \cos(\ldots) \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sin(\ldots) \leqslant 1 \end{cases}$ quelque soit ce qui est dans le cosinus ou le sinus
  - si u_n est défini par $\sum\limits_{k=0}^{n} \ldots$, alors $0 \leqslant k \leqslant n$.

Remarques sur les exercices

- L'exercice ① permet de revoir toutes les opérations sur les limites, avec et sans formes indéterminées.
- L'exercice ② s'occupe de tous les calculs de limite qu'on peut faire avec les suites géométriques.
- L'exercice ③ fait faire des calculs de limites par minoration, majoration ou encadrement.
  Avec un encadrement, il arrive qu'on n'utilise que la minoration de gauche ou que la majoration de droite !

- L'exercice ④ est difficile et est à laisser en seconde lecture.
  Il traite des suites définies comme sommes de termes. La technique n'est pas facile, mais c'est toujours la même.
- Les exercices ⑤ à ⑦ sont des exercices de baccalauréat sur des situations concrètes d'évolution.
  Les exercices ⑧ à ⑮ sont des exercices de baccalauréat sur des situations abstraites.

---

① **1.** Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants (pas de forme indéterminée) :

a. $u_n = 3n - \dfrac{2}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. $u_n = 1 - 3n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. $u_n = \dfrac{1}{1+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. $u_n = -10 + n - \dfrac{3}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e. $u_n = \dfrac{-2}{n^2+n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacune des formes indéterminées suivantes :

a. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d. $u_n = \dfrac{n+1}{n^2-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

f. $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{2n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacune cas suivants (avec ou sans forme indéterminée) :

a. $u_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. $u_n = \dfrac{-2n^2+3}{5-n}$ pour tout entier $n \geqslant 6$.

c. $u_n = 3n^2 - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e. $u_n = \dfrac{1}{n^2-1}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

f. $u_n = -9n - \dfrac{4}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g. $u_n = \dfrac{2n^2-1}{4n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

h. $u_n = 1 - \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i. $u_n = n + \dfrac{n+1}{n^2-2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

j. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

k. $u_n = n - \dfrac{2n^2 - 1}{n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

l. $u_n = \dfrac{(1 - n)^2}{1 - n^2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

m. $u_n = \dfrac{10n - 1}{5 - n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

n. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

o. $u_n = \dfrac{n}{1 + \sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

p. $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

② **1.** Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacune cas suivants :

a. $u_n = 150 \times (0{,}9)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. $u_n = -0{,}5 \times 1{,}2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. $u_n = 1 - 5^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. $u_n = 0{,}2 + 0{,}2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e. $u_n = 2 + \dfrac{1}{n} - 3\,\mathrm{e}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

f. $u_n = 2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

g. $u_n = 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

h. $u_n = -5 \times 7^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i. $u_n = \dfrac{2^n + 1}{2^n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

j. $u_n = \dfrac{2^n - 5^n}{2^n + 5^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. **a.** Soit la suite géométrique (b_n) de premier terme $b_0 = 2$ et de raison $0{,}1$.
Déterminer la limite de (b_n) .

b. Déterminer la limite de la suite géométrique (c_n) de premier terme $c_0 = -2$ et de raison $1{,}2$.

3. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_{n-1}$ où (g_n) est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2 .
Déterminer la limite de (S_n) .

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = h_0 + h_1 + h_2 + .. + h_{n-1} + h_n$ où (h_n) est la suite géométrique de premier terme 100 et de raison $0{,}8$.
Déterminer la limite de (T_n) .

c. Soit la suite $(G2_n)$ définie pour tout entier n par $G2_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Déterminer la limite de $(G2_n)$.

d. Soit la suite $(G3_n)$ définie pour tout entier n par $G3_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

Déterminer la limite de $(G3_n)$.

Remarque : La présentation est différente du **c.** mais on reconnaît bien la somme des termes d'une suite géométrique.

e. Pour un entier $k \geqslant 2$, on définit la suite (Gk_n) pour tout entier n par $Gk_n = 1 + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k^2} + \ldots + \dfrac{1}{k^{n-1}}$.

Exprimer la limite de (Gk_n) en fonction de k .

---

③ Les **1.** à **5.** sont indépendants.

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier non nul n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Montrer que (u_n) converge vers 0.

2. Soit la suite (a_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $a_n = n^2\sqrt{2n}$.

a. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\sqrt{2n} \geqslant \sqrt{2}$.

b. En déduire que (a_n) diverge vers $+\infty$.

3. Soit la suite (t_n) définie pour tout entier n par $t_n = \dfrac{1}{n + \sin n}$.

Démontrer que (t_n) est convergente et préciser sa limite.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = \dfrac{n^2 - 7}{n + 3}$.

a. Démontrer que, pour tout entier n, $v_n \geqslant n - 3$.

b. En déduire la limite de (v_n).

5. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier n par $w_n = \dfrac{n}{2 - \cos n}$.

Déterminer la limite de (w_n).

---

④ Pour ces exercices, partez de $1 \leqslant k \leqslant n$.
Les **1.** à **3.** sont indépendants.
Regardez la correction du **1.** et inspirez-vous en pour les autres.

1. On définit la suite (S_n) pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\sqrt{n} \leqslant S_n \leqslant n$.

b. En déduire la limite de (S_n).

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit les suites (U_n) et (V_n) par :

$$U_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \ldots + \frac{1}{n^2+n} \text{ qu'on peut noter } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}.$$

$$V_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \text{ qu'on peut noter } \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

a. Quelle est la limite quand n tend vers $+\infty$ de chacun des termes $\dfrac{1}{n^2+1}, \dfrac{1}{n^2+2}, \ldots, \dfrac{1}{n^2+n}$?

Quelle est la limite quand n tend vers $+\infty$ de chacun des termes $\dfrac{n}{n^2+1}, \dfrac{n}{n^2+2}, \ldots, \dfrac{n}{n^2+n}$?

Remarque : Donc, quand n tend vers $+\infty$, tous les termes de ces deux sommes sont de plus en plus proches de 0. On va donc ajouter une infinité de termes infiniment petits…

b. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n}{n^2+n} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{n}{n^2+1}$ et $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant V_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

En déduite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n$.

3. On définit la suite (T_n) pour tout entier $n \geqslant 1$ par $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$.

a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{\sqrt{n}}{2} \leqslant T_n \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n}+1}$.

b. En déduire la limite de (T_n).

---

⑤ Une commune dispose de 400 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.
Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.
Pour cela, il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019.
Ainsi, $u_0 = 280$.
On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 42$.

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019 ?

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 420$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera le premier terme v_0 et la raison.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que $u_n = -40\times 0{,}9^n + 420$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
En conséquence, quelle décision devra prendre le responsable de ce système.

D'après Baccalauréat ES Amérique du Nord 2019

---

⑥ Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :
$u_0 = 1\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2\,u_n - 100$.

1. a. Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
On précisera en particulier ce que représente u_n.

b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Recopier et compléter l'algorithme suivant pour répondre à ce problème et donner alors le nombre de jours cherché.

```
u = 1000
n = 0
while ... :
    u = ...
    n = n+1
print(...)
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 500$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Donner une interprétation de cette limite.

---

⑦ La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton.
Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :
$T_{n+1} - T_n = k\,(T_n - M)$ où k est une constante réelle.
Dans la suite, on choisit $M = 10$ et $k = -0{,}2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0{,}2\,(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0{,}8\,T_n + 2$.

3. On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = T_n - 10$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0 .

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10$.

c. Déterminer la limite de la suite (T_n) .
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

D'après Baccalauréat S Asie 2019

---

⑧ L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{n u_n + 1}{2(n+1)}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

On définit une suite auxiliaire (v_n) pour tout entier $n > 1$ par $v_n = n u_n - 1$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n > 1$, on a $u_n = \dfrac{1 + 0{,}5^n}{n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

D'après Baccalauréat S Centres Étrangers 2013

---

⑨ La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

1. a. À l'aide du calcul des premiers termes de la suite (u_n) , conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n .

b. Démontrer cette conjecture.

2. En déduire la valeur de la limite de la suite (u_n) .

---

⑩ Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1$.

On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

d. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et $T_n = \dfrac{S_n}{n^2}$.

Exprimer S_n en fonction de n .

Déterminer la limite de la suite (T_n) .

D'après Baccalauréat S Métropole 2013

---

⑪ On considère la suite (u_n) définie $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

On suppose que tous les termes de la suite (u_n) sont différents de 1 et on définit la suite (v_n) pour tout n entier naturel par $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .

c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \dfrac{3^n}{3^n + 1}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

D'après Baccalauréat S Polynésie 2013

⑫ On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Établir que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

Exprimer u_n en fonction de n, et déterminer la limite de la suite (u_n).

D'après Baccalauréat S Métropole Septembre 2013

---

⑬ On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$.

Soit la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

a. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

D'après Baccalauréat S Liban 2013

---

⑭ On considère la suite (a_n) telle que, pour tout entier naturel n, $a_n = 100\, n \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 340$.

a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a $2^n \geqslant n^2$.

c. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a $0 \leqslant 100\, n \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100}{n}$.

d. Étudier la convergence de la suite (a_n).

D'après Baccalauréat S Nouvelle Calédonie Novembre 2015

---

⑮ Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation $u_{n+1} = a\,u_n + b$, où a et b sont des réels non nuls tels que $a \neq 1$.

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1 - a}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

b. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

D'après Baccalauréat S Pondichéry 2015