Correction de **SUITES - Fiche 2**

Navigation vers les corrections : ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮

① Deux niveaux de présentation sont proposés.
Le premier niveau à gauche est très détaillé pour les débutants et permet de bien comprendre.
Les versions rapides à droite sont autorisées pour ceux qui ont bien compris, et surtout dans les exercices plus complexes.

1. **a.** $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \text{ donc par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{n} = 0 \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3n - \frac{2}{n}\right) = +\infty$.

Version plus rapide et autorisée :
$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{2}{n}\right) = 0 \end{cases}$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3n - \frac{2}{n}\right) = +\infty$.

Vous pouvez répondre à la fin simplement :
... donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^2 = -\infty$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - 3n^2\right) = -\infty$. → Là aussi, on acceptera directement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - 3n^2\right) = -\infty$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + n) = +\infty$

donc, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n} = 0$.

d. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (-10 + n) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ donc par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{3}{\sqrt{n}}\right) = 0 \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-10 + n - \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$.

Version plus rapide et autorisée :
$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (-10 + n) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{3}{\sqrt{n}}\right) = 0 \end{cases}$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-10 + n - \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$.

e. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (n + 3) = +\infty \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 + n + 3\right) = +\infty$

donc, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+n+3} = 0$

donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n^2+n+3} = 0$.

Version plus rapide et autorisée :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 + n + 3\right) = +\infty$
donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n^2+n+3} = 0$.

Attention, vous ne pourriez pas aller aussi vite pour $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 - n + 3\right) = +\infty$

---

2. **a.** <u>BROUILLON</u> : On repère d'abord la forme indéterminée en analysant le quotient : $\frac{\overset{+\infty}{n}}{\underset{+\infty}{n+1}}$

$\frac{(+\infty)}{(+\infty)}$ est bien un **quotient indéterminé** car un nombre très grand divisé par un nombre très grand peut être très grand, très petit ou ni l'un ni l'autre...
On doit donc commencer par une **transformation de l'expression** :

$\frac{n}{n+1} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ → Je factorise et simplifie par n , le responsable de ma forme indéterminée.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ → On peut écrire directement $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ sans le justifier.

et par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$. → Ni très grand, ni très petit... Aucun infini ne l'a emporté.

b. On peut appliquer la même factorisation qu'au **a.**, cela fonctionne très bien.
Mais regardez comme on peut aller très vite :

$\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ → Je transforme mon expression.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. → Ni très grand, ni très petit...

Attention, impossible de faire pareil avec l'exemple du **a.** !

c. BROUILLON : On repère d'abord le quotient indéterminé $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$.

1ère méthode : la factorisation faible par n

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{\cancel{n}\times n}{\cancel{n}\,(1+\frac{1}{n})} = \frac{n}{1+\frac{1}{n}}$$

→ BROUILLON : $\dfrac{\overbrace{n}^{+\infty}}{\underbrace{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}}_{1}}$ La transformation amène un quotient qui n'est plus indéterminé.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n}) = 1 \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{1+\frac{1}{n}} = +\infty$.

→ L'infini du haut l'a emporté.

2ème méthode : la factorisation forte par n^2

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\,(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

→ BROUILLON : $\dfrac{1}{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}}_{0}}$ Le quotient $\dfrac{1}{(0)}$ n'est plus indéterminé, mais...

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \end{cases}$$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}) = 0$

... attention à $\dfrac{1}{(0)}$, l'inverse d'un très petit peut aller vers $+\infty$ ou $-\infty$, tout dépend de son signe...

De plus, $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$ est toujours positif,

→ Il faut donc penser à étudier le signe (ici très facile).

donc, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = +\infty$.

d. BROUILLON : C'est toujours un quotient indéterminé $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$.

1ère méthode : factorisation faible par n

$$\frac{n+1}{n^2-1} = \frac{n\,(1+\frac{1}{n})}{n\,(n-\frac{1}{n})} = \frac{1+\frac{1}{n}}{n-\frac{1}{n}}$$

→ BROUILLON : $\dfrac{\overbrace{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}}^{1}}{\underbrace{\underbrace{n}_{+\infty}-\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}}_{+\infty}}$ Le quotient $\dfrac{(1)}{(+\infty)}$ n'est plus indéterminé.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n}) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (n-\frac{1}{n}) = +\infty \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{n-\frac{1}{n}} = 0$.

2ème méthode : factorisation forte par n^2

$$\frac{n+1}{n^2-1} = \frac{n^2\,(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\,(1-\frac{1}{n^2})} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}) = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n^2} = 1 \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = 0$.

3ème méthode : factorisation non équilibrée. par n en haut et par n^2 en bas

$$\frac{n+1}{n^2-1} = \frac{n\,(1+\frac{1}{n})}{n^2\,(1-\frac{1}{n^2})} = \frac{1+\frac{1}{n}}{n\,(1-\frac{1}{n^2})}$$

→ Je simplifie par un seul n, attention, il en reste un en bas.

D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n}) = 1$.

D'autre part, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (1-\frac{1}{n^2}) = 1 \end{cases}$ donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(1-\frac{1}{n^2}) = +\infty$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{n\,(1-\frac{1}{n^2})} = 0$.

e. $\dfrac{(n+1)^2}{n} = \dfrac{n^2+2n+1}{n} = \dfrac{n^2}{n}+\dfrac{2n}{n}+\dfrac{1}{n} = n+2+\dfrac{1}{n}$ → Sympa en fait...

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \end{cases}$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n+2+\dfrac{1}{n}\right) = +\infty$.

f. $\dfrac{(n+1)^2}{2n^2+1} = \dfrac{n^2+2n+1}{2n^2+1} = \dfrac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

donc, par somme $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n^2}\right) = 2 \end{cases}$

et donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$.

g. BROUILLON : $\underbrace{\sqrt{n+1}}_{+\infty} - \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty}$ C'est une somme indéterminée $(+\infty)-(+\infty)$.

La présence d'une somme de racines carrées doit vous faire réagir... Pensez à la **quantité conjuguée** :

Vous reconnaissez $(a-b)(a+b)$ ... et a^2-b^2 !

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ → C'est beau.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) = +\infty$ → Et là on est sauvé car ce n'est plus une différence, c'est une somme !

donc, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$.

---

3. **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\sqrt{n}\right) = +\infty$

donc, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{n}} = 0$.

b. Forme indéterminée $\dfrac{(-\infty)}{(+\infty)}$, utilisons la factorisation non équilibrée (la factorisation forte par n^2 pose un problème pour étudier le signe...) :

$\dfrac{-2n^2+3}{5-n} = \dfrac{n^2\left(-2+\frac{3}{n^2}\right)}{n\left(\frac{5}{n}-1\right)} = \dfrac{n\left(-2+\frac{3}{n^2}\right)}{\frac{5}{n}-1}$

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-2+\frac{3}{n^2}\right) = -2 \text{ donc, par produit, } \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(-2+\frac{3}{n^2}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{n}-1\right) = -1 \end{cases}$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\left(-2+\frac{3}{n^2}\right)}{\frac{5}{n}-1} = +\infty$.

La factorisation faible par n fonctionne bien aussi :

$\dfrac{-2n^2+3}{5-n} = \dfrac{n\left(-2n+\frac{3}{n}\right)}{n\left(\frac{5}{n}-1\right)} = \dfrac{-2n+\frac{3}{n}}{\frac{5}{n}-1}$

On obtient $\dfrac{(-\infty)}{(-1)}$ qui n'est pas indéterminé et donne bien $+\infty$.

c. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(3n^2-1\right) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3n^2-1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$.

d. Forme indéterminée $(+\infty)-(+\infty)$.

$(a-b)(a+b)$ est devenu a^2-b^2

$\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \dfrac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{n-n+1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right) = +\infty$

donc, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 0$.

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2-1) = +\infty$

donc, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2-1} = 0$.

f. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (-9n) = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{4}{n}\right) = 0 \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-9n-\dfrac{4}{n}\right) = -\infty$.

g. Forme indéterminée $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$: $\dfrac{2n^2-1}{4n^2+1} = \dfrac{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{4+\frac{1}{n^2}}$

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{n^2}\right) = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(4+\dfrac{1}{n^2}\right) = 4 \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{4+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

h. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\sqrt{n}) = -\infty$.

i. Le $2^{\text{ème}}$ terme est une forme indéterminée $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$: $\dfrac{n+1}{n^2-2} = \dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}$

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{2}{n^2}\right) = 1 \text{ donc, par produit, } \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right) = +\infty \end{cases}$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2-2} = 0$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n+\dfrac{n+1}{n^2-2}\right) = +\infty$.

j. On reconnaît le dénominateur qui est la somme indéterminée $(+\infty)-(+\infty)$ vue dans le **2. g.** .

$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = +\infty$

$(a-b)(a+b)$ est devenu a^2-b^2

k. Il ressemble au **i.** ...

Mais une mauvaise surprise vous attend si vous étudiez $\dfrac{2n^2-1}{n+1}$: ça tend vers $+\infty$.

Donc $n-\dfrac{2n^2-1}{n+1}$ est une somme indéterminée $(+\infty)-(+\infty)$.

Il faut alors tout factoriser dès le début :

$n-\dfrac{2n^2-1}{n+1} = \dfrac{n(n+1)-2n^2+1}{n+1} = \dfrac{-n^2+n+1}{n+1} = \dfrac{n\left(-n+1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{-n+1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-n+1+\dfrac{1}{n}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1 \end{cases}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n+1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = -\infty$.

l. Forme indéterminée $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$, on développe puis on factorise par n^2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1-n)^2}{1-n^2} = -1$ comme dans le **g.** .

m. Forme indéterminée $\dfrac{(+\infty)}{(-\infty)}$, on factorise par n^2 et par n : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10n-1}{5-n^2} = 0$.

n. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty \text{ donc, par inverse, } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right) = 0$.

o. Forme indéterminée $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$:

$$\frac{n}{1+\sqrt{n}} = \frac{\cancel{\sqrt{n}}\sqrt{n}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)} = \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+1}$$

→ Factorisation faible par $\sqrt{n}$ avec l'astuce à connaître $n = \sqrt{n}\times\sqrt{n}$.

La factorisation forte par n fonctionne aussi :
$$\frac{n}{1+\sqrt{n}} = \frac{n}{n\left(\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$
On obtient $\dfrac{1}{(0)}$ qui nécessite une étude de signe de $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Pas très difficile puisque c'est positif, mais c'est plus long.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ donc, par somme, } \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1\right) = 1 \end{cases}$$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+1} = +\infty$.

p. Forme indéterminée $(+\infty)-(+\infty)$:

$$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1} = \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{n^2+1-n^2+1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right) = +\infty$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = 0$.

---

② **1.** **a.** $-1 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$

→ Attention, ici, n'allez pas trop vite et montrez bien la position de $0{,}9$.

donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 150\times(0{,}9)^n = 0$.

b. $1{,}2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}2^n = +\infty$

donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} -0{,}5\times1{,}2^n = -\infty$.

→ N'oubliez pas qu'un petit $-$ peut faire basculer de $+\infty$ à $-\infty$.

c. $5 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5^n = -\infty$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-5^n) = -\infty$.

d. $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^n = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}2+0{,}2^n) = 0{,}2$.

e. $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 2 \\ e > 1 \text{ donc } \lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{n\to+\infty} -3\,e^n = +\infty \end{cases}$$

On rappelle que $e = 2{,}718...$.

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\dfrac{1}{n}-3\,e^n\right) = +\infty$.

f. $e > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$

donc, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e^n} = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{e^n}\right) = 2$.

On peut aussi voir une autre raison car $\dfrac{1}{e^n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ avec $\dfrac{1}{e} = 0{,}367...$.

$-1 < \dfrac{1}{e} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{e}\right)^n = +\infty$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n\right) = 2$.

g. $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = 1$.

h. $7 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$

donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5\times7^n) = -\infty$.

i. Forme indéterminée $\dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$.

C'est 2^n qui va jouer le terme de plus haut degré : $\dfrac{2^n+1}{2^n-1} = \dfrac{\cancel{2^n}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}{\cancel{2^n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}}$

$2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

donc, par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$

donc, par somme, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{2^n}\right) = 1 \end{cases}$

et donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2^n}} = 1$.

j. Le numérateur est une somme indéterminée $(+\infty)-(+\infty)$.

C'est 5^n qui va jouer le terme de plus haut degré : $\dfrac{2^n-5^n}{2^n+5^n} = \dfrac{\cancel{5^n}\left(\dfrac{2^n}{5^n}-1\right)}{\cancel{5^n}\left(\dfrac{2^n}{5^n}+1\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n-1}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+1}$

$-1<\dfrac{2}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$

donc, par somme, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^n-1\right) = -1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+1\right) = 1 \end{cases}$

et donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n-1}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+1} = -1$.

---

2. **a.** (b_n) géométrique de premier terme 2 et de raison $0{,}1$
donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 2\times 0{,}1^n$.

$-1<0{,}1<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}1^n = 0$

donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2\times 0{,}1^n) = 0$.

b. (c_n) géométrique de premier terme -2 et de raison $1{,}2$
donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = -2\times 1{,}2^n$.

$1{,}2>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}2^n = +\infty$

donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2\times 1{,}2^n) = -\infty$.

---

3. **a.** (g_n) est géométrique de premier terme 1 et de raison 2

donc $S_n = 1\times\dfrac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1$

Or, $2>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n-1) = +\infty$.

b. (h_n) est géométrique de premier terme 100 et de raison $0{,}8$

donc $T_n = 100\times\dfrac{1-0{,}8^n}{1-0{,}8} = 100\times\dfrac{1-0{,}8^n}{0{,}2} = 500\,(1-0{,}8^n)$

Or, $-1<0{,}8<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$

donc, par somme et par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 500\,(1-0{,}8^n) = 500$.

c. $G2_n = 1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 1 .

↓ N'oublions pas que 1 est $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.

Donc $G2_n = 1\times\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\dfrac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.

Or, $-1<\dfrac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

et donc, par somme et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 2$.

d. $G3_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{3^{n-1}} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

C'est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1 .

Donc $G3_n = 1 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

Or, $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

et donc, par somme et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{2}$.

e. $Gk_n = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + ... + \frac{1}{k^{n-1}}$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{k}$ et de premier terme 1 .

Donc $Gk_n = 1 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{k}\right)^n}{1-\frac{1}{k}} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{k}\right)^n}{\frac{k-1}{k}} = \frac{k}{k-1}\left(1-\left(\frac{1}{k}\right)^n\right)$.

Or, $k \geqslant 2$ donc $0 < \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{2}$ donc $-1 < \frac{1}{k} < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^n = 0$

donc, par somme et par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k}{k-1}\left(1-\left(\frac{1}{k}\right)^n\right) = \frac{k}{k-1}$.

---

③ **1.** *En présence d'un $(-1)^n$, j'ai le réflexe d'encadrer entre -1 et 1 :*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

donc $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$$

donc, par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. → *Au lieu de* « par encadrement », *vous pouvez écrire aussi* « d'après le théorème des gendarmes ».

---

2. **a.** *La suite est définie de manière explicite, donc peu de chance qu'on utilise une démonstration par récurrence.*

$n \geqslant 1$

donc $2n \geqslant 2$

donc $\sqrt{2n} \geqslant \sqrt{2}$ car la fonction racine carrée est croissante.

b. Pour tout $n \geqslant 1$:

$\sqrt{2n} \geqslant \sqrt{2}$

donc $n^2\sqrt{2n} \geqslant n^2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{2} = +\infty \\ a_n \geqslant n^2\sqrt{2} \end{cases}$$

Donc, par minoration : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{2n} = +\infty$. → $n^2\sqrt{2}$ *"pousse"* a_n *vers* $+\infty$.

---

3. *En présence d'un* sinus, *j'ai le réflexe d'encadrer entre* -1 *et* 1 *:*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{lccccc} & -1 & \leqslant & \sin n & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & n-1 & \leqslant & n+\sin n & \leqslant & n+1 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{n-1} & \geqslant & \dfrac{1}{n+\sin n} & \geqslant & \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty \text{ donc, par inverse, } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-1} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty \text{ donc, par inverse, } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \,. \end{cases}$$

On en déduit par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+\sin n} = 0$.

---

4. **a.** Un grand classique : pour démontrer que $A \geqslant B$, je vais démontrer que $A - B$ est positif.

Pour tout entier n :

$$\begin{aligned} v_n - (n-3) &= \frac{n^2-7}{n+3} - (n-3) \\ &= \frac{n^2-7}{n+3} - \frac{(n-3)(n+3)}{n+3} \\ &= \frac{n^2-7-n^2+9}{n+3} \\ &= \frac{2}{n+3} \geqslant 0 \end{aligned}$$

donc $v_n \geqslant n-3$.

b. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (n-3) = +\infty \\ v_n \geqslant n-3 \end{cases}$

donc, par minoration : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

---

5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{lccccc} & -1 & \leqslant & \cos n & \leqslant & 1 \\ \text{donc} & 1 & \geqslant & -\cos n & \geqslant & -1 \\ \text{donc} & 3 & \geqslant & 2-\cos n & \geqslant & 1 \\ \text{donc} & \frac{1}{3} & \leqslant & \frac{1}{2-\cos n} & \leqslant & \frac{1}{1} \\ \text{donc} & \frac{n}{3} & \leqslant & \frac{n}{2-\cos n} & \leqslant & n \end{array}$$

car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}+^*$

$\underbrace{\frac{n}{3} \leqslant \frac{n}{2-\cos n}}_{\text{Seule la partie gauche de l'encadrement est utile}}$

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{3} = +\infty \\ \frac{n}{3} \leqslant w_n \end{cases}$

donc, par minoration : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

---

④ **1.** **a.** Pour tout k de $\{1 ; 2 ; ... ; n\}$, on a :

$$\begin{array}{lccccc} & 1 & \leqslant & k & \leqslant & n \\ \text{donc} & 1 & \leqslant & \sqrt{k} & \leqslant & \sqrt{n} \\ \text{donc} & \frac{1}{1} & \geqslant & \frac{1}{\sqrt{k}} & \geqslant & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \text{donc} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \leqslant & \frac{1}{\sqrt{k}} & \leqslant & 1 \end{array}$$

car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$

car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}+^*$

→ Je remets dans l'ordre croissant.

Il faut bien comprendre ici qu'on a écrit en fait autant d'encadrements qu'il y a de valeurs de k, c'est-à-dire n encadrements. que voici :

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1}} \leqslant 1 & \text{pour } k = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant 1 & \text{pour } k = 2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}} \leqslant 1 & \text{pour } k = n-1 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 1 & \text{pour } k = n \end{array}$$

Pour obtenir S_n, on va ajouter toutes les racines du centre.

Mais aussi tous les 1 de droite. Il y en a n, donc la somme fera $1+1+1+..+1 = n \times 1 = n$.

Et aussi tous les $\frac{1}{\sqrt{n}}$ de gauche. Il y en a aussi n, donc la somme fera $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Donc, par somme : $n \times \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant S_n \leqslant n \times 1$ → Heureusement qu'on a un peu expliqué, hein ?

Or $n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}$.

On en déduit : $\sqrt{n} \leqslant S_n \leqslant n$.

b. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \sqrt{n} \leqslant S_n \end{cases}$

donc, par minoration : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

---

2. a.

- Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+k) = +\infty$

  donc, par inverse : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+k} = 0$.

  Donc, chacun des termes $\dfrac{1}{n^2+1}$, $\dfrac{1}{n^2+2}$, … , $\dfrac{1}{n^2+n}$ tend vers 0 .

- Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, $\dfrac{n}{n^2+k} = \dfrac{n}{n\left(n+\dfrac{k}{n}\right)} = \dfrac{1}{n+\dfrac{k}{n}}$.

  $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k}{n} = 0 \end{cases}$ donc, par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n+\dfrac{k}{n}\right) = +\infty$, donc, par inverse : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+\dfrac{k}{n}} = 0$.

  Donc, chacun des termes $\dfrac{n}{n^2+1}$, $\dfrac{n}{n^2+2}$, … , $\dfrac{n}{n^2+n}$ tend vers 0 .

b.

- Pour tout k de $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$, on a :

  $1 \leqslant k \leqslant n$

  donc $n^2+1 \leqslant n^2+k \leqslant n^2+n$

  donc $\dfrac{1}{n^2+1} \geqslant \dfrac{1}{n^2+k} \geqslant \dfrac{1}{n^2+n}$ car la fonction inverse est décroissante sur ℝ+*

  donc $\dfrac{1}{n^2+n} \leqslant \dfrac{1}{n^2+k} \leqslant \dfrac{1}{n^2+1}$ → Je remets dans l'ordre croissant.

  On a de nouveau n encadrements.

  Pour obtenir U_n , on va ajouter toutes les valeurs du centre.

  Comme dans l'exercice **1.** , les $\dfrac{1}{n^2+n}$ de gauche sont tous les mêmes, il y en a n .

  Et les $\dfrac{1}{n^2+1}$ de droite sont également tous les mêmes. il y en a n aussi.

  Donc, par somme : $n \times \dfrac{1}{n^2+n} \leqslant U_n \leqslant n \times \dfrac{1}{n^2+1}$

  et donc $\dfrac{n}{n^2+n} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{n}{n^2+1}$.

  $\begin{cases} \dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{n}{n\left(n+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}} \\ \dfrac{n}{n^2+n} = \dfrac{n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$

  $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \text{ , donc par somme } \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n+\dfrac{1}{n}\right) = +\infty \text{ et par inverse } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty \text{ donc par inverse } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 . \end{cases}$

  On en déduit par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

- Pour tout k de $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$, on a :

  $1 \leqslant k \leqslant n$

  donc $n^2+1 \leqslant n^2+k \leqslant n^2+n$

  donc $\dfrac{1}{n^2+1} \geqslant \dfrac{1}{n^2+k} \geqslant \dfrac{1}{n^2+n}$ car la fonction inverse est décroissante sur ℝ+*

  donc $\dfrac{n}{n^2+1} \geqslant \dfrac{n}{n^2+k} \geqslant \dfrac{n}{n^2+n}$

  donc $\dfrac{n}{n^2+n} \leqslant \dfrac{n}{n^2+k} \leqslant \dfrac{n}{n^2+1}$

  On ajoute ces n encadrements.

  Donc, par somme : $n \times \dfrac{n}{n^2+n} \leqslant V_n \leqslant n \times \dfrac{n}{n^2+1}$

  et donc $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant V_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

$$\begin{cases} \dfrac{n^2}{n^2+n} = \dfrac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ \dfrac{n^2}{n^2+1} = \dfrac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \text{ donc par somme puis par inverse } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \text{ donc par somme puis par inverse } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1\,. \end{cases}$$

On en déduit par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 1$.

On voit sur cet exemple qu'une somme infinie de termes infiniment proches de 0 peut donner deux résultats différents...
On va voir dans l'exercice suivant que cela peut être encore autre chose.

---

3. **a.** Pour tout k de $\{1\,;2\,;...\,;n\}$, on a :

$1 \leqslant k \leqslant n$

donc $1 \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$

donc $\sqrt{n}+1 \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{n}$

donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}+1} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}+^*$

donc $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$

On ajoute ces n encadrements.

Donc, par somme : $n \times \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant T_n \leqslant n \times \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$

et donc $\dfrac{\sqrt{n}}{2} \leqslant T_n \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n}+1}$.

b. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{2} = +\infty \\ \dfrac{\sqrt{n}}{2} \leqslant T_n \end{cases}$

donc, par minoration : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.

---

⑤ **1.** Le nombre de voitures louées au mois de février 2019 est $u_1 = 0{,}9u_0 + 42 = 0{,}9\times280 + 42 = 294$.

2. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 420 \\ &= 0{,}9u_n + 42 - 420 \\ &= 0{,}9u_n - 378 \\ &= 0{,}9\left(u_n - \frac{378}{0{,}9}\right) \\ &= 0{,}9\,(u_n - 420) \\ &= 0{,}9\,v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $0{,}9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 420 = -40$.

b.
- On déduit du **a.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0\times0{,}9^n = -40\times0{,}9^n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $v_n = u_n - 420 \Leftrightarrow u_n = v_n + 420$
  $\Leftrightarrow u_n = -40\times0{,}9^n + 420$

3. $-1 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$

donc par produit puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-40\times0{,}9^n + 420) = 420$.

Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre de mois, le nombre de véhicules loués va se rapprocher de 420.
En conséquence, le nombre de véhicules dont dispose le responsable sera alors un jour insuffisant : il doit augmenter son nombre de véhicules.

⑥ **1.** **a.** La masse, représentée par u_n, augmente chaque jour de 20 % dont elle est multipliée par 1,2.
Puis, chaque jour, 100 g de bactéries sont perdus. Donc on soustrait 100.

On a bien $u_{n+1} = 1{,}2\, u_n - 100$ pour tout entier n.

b.

```
u = 1000
n = 0
while u<=30 :
      u = 1.2u-100
      n = n+1
print(n)
```

L'algorithme affiche la valeur 23.
Donc, on dépassera 30 kg de bactéries au bout de 23 jours.

2. Posons $\mathscr{P}(n)$ la comparaison $u_{n+1} > u_n$.

- Initialisation :

$$\begin{cases} u_0 = 1\,000 \\ u_1 = 1{,}2\times 1\,000 - 100 = 1\,100 \end{cases}$$ donc $u_1 > u_0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $u_{n+1} > u_n$ pour un certain entier $n \geqslant 0$ quelconque.
Alors :

$u_{n+1} > u_n$ par hypothèse de récurrence
donc $1{,}2u_{n+1} > 1{,}2u_n$
donc $1{,}2u_{n+1} - 100 > 1{,}2u_n - 100$
donc $u_{n+2} > u_{n+1}$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que (u_n) est strictement croissante.

3. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 500 \\ &= 1{,}2u_n - 100 - 500 \\ &= 1{,}2u_n - 600 \\ &= 1{,}2\left(u_n - \frac{600}{1{,}2}\right) \\ &= 1{,}2\,(u_n - 500) \\ &= 1{,}2\, v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $1{,}2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 500 = 500$.

b.
- On déduit du **a.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 1{,}2^n = 500\times 1{,}2^n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$v_n = u_n - 500 \Leftrightarrow u_n = v_n + 500$
$\Leftrightarrow u_n = 500\times 1{,}2^n + 500$
$\Leftrightarrow u_n = 500\,(1 + 1{,}2^n)$

c. $1{,}2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}2^n = +\infty$

donc par somme puis par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 500\,(1 + 1{,}2^n) = +\infty$.

Cela signifie que la masse de bactérie deviendra aussi grande qu'on veut au bout d'un nombre de jours suffisamment grand.

---

⑦ *Seules les question originales sont corrigées.*

1. Le café va refroidir, donc la suite (T_n) est décroissante.

2. Pour tout entier naturel n :
$T_{n+1} - T_n = -0{,}2\,(T_n - 10)$
donc $T_{n+1} = -0{,}2\, T_n + 2 + T_n$
donc $T_{n+1} = 0{,}8\, T_n + 2$

3. **c.** $-1 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$

donc par produit puis par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (70\times 0{,}8^n + 10) = 10$.

Cela signifie que la température du café va tendre vers 10°C.

⑧ **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = (n+1)\,u_{n+1} - 1$$

$$= \cancel{(n+1)}\,\frac{nu_n + 1}{2\,\cancel{(n+1)}} - 1$$ → Simplification très heureuse, encore faut-il la voir...

$$= \frac{1}{2}nu_n + \frac{1}{2} - 1$$

$$= \frac{1}{2}nu_n - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(nu_n - 1)$$

$$= \frac{1}{2}v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = 0 \times u_1 - 1 = \frac{1}{2}$. → Attention, on commence au rang 1 ...

b. • On déduit du **a.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. → ... et donc la formule explicite est à adapter !

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = nu_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n + 1}{n}$$

• Et donc $u_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{n}$ ou encore $u_n = \dfrac{1 + 0{,}5^n}{n}$.

c. $\begin{cases} -1 < 0{,}5 < 1 \text{ donc } \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0 \text{ donc, par somme } \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + 0{,}5^n) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \end{cases}$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + 0{,}5^n}{n} = 0$.

---

⑨ **1.** **a.** $u_0 = 0$

$$u_1 = \frac{1}{2 - u_0} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2 - u_1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{2 - u_2} = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$u_4 = \frac{1}{2 - u_3} = \frac{1}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

b. Posons $\mathcal{P}(n)$ l'égalité $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

- <u>Initialisation</u> :

  $u_0 = 0 = \dfrac{0}{0+1}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- <u>Itération</u> :

  Supposons $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour un certain entier $n \geqslant 0$ quelconque.

  Montrons $\mathcal{P}(n+1)$: $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+1+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

  Alors :

  $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ par hypothèse de récurrence

  donc $2 - u_n = 2 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{n+1} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2n+2-n}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$

  donc $\dfrac{1}{2 - u_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$

  donc $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$

- <u>Conclusion</u> :

  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. BROUILLON : On repère d'abord le quotient indéterminé $\frac{(+\infty)}{(+\infty)}$ et on factorise par n .

$u_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

---

⑩ **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 \\ &= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 1) \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

b.
- On déduit du **a.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $v_n = u_n - n \Leftrightarrow u_n = v_n + n$
- Et donc $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c. $\begin{cases} -1 < \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ et donc } \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \end{cases}$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\right) = +\infty$.

d.
- $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

  $= v_0 + 0 + v_1 + 1 + ... + v_n + n$ → J'applique $u_n = v_n + n$ pour chaque terme de la somme.

  $= \underbrace{(v_0 + v_1 + ... + v_n)}_{} + \underbrace{(0 + 1 + ... + n)}_{}$

  Je reconnais une somme de termes d'une suite géométrique et la somme des premiers entiers jusqu'à n .

  $= 2 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{n(n+1)}{2}$ car (v_n) géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme 2 et le nombre de termes est $n+1$

  $= 6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$ → Pas très sympa mais ce n'est pas grave...

- $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

  $= \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

  D'une part, $\begin{cases} -1 < \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0 \text{ donc, par somme et produit, } \lim\limits_{n\to+\infty} 6\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \end{cases}$

  donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0$

  D'autre part : $\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{n^2}{2n^2} + \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$.

  On en conclut par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

⑪ **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}$$ → Je ne m'inquiète pas de la lourdeur du calcul...

$$= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{\dfrac{1+2u_n}{1+2u_n}-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}$$ → ... si, si, j'ai confiance...

$$= \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{\dfrac{1-u_n}{1+2u_n}}$$

$$= \frac{3u_n}{\cancel{1+2u_n}} \times \frac{\cancel{1+2u_n}}{1-u_n}$$ → ... car les dénominateurs s'éliminent !

$$= \frac{3u_n}{1-u_n}$$ → Je sais que je dois obtenir $\ldots \times v_n$, c'est-à-dire $\ldots \times \dfrac{u_n}{1-u_n}$, ça ne va pas être bien difficile !

$$= 3 \times \frac{u_n}{1-u_n}$$

$$= 3v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

b. On déduit du **a.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 3^n = 3^n$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow v_n(1-u_n) = u_n$$ → Mon but est d'isoler u_n.

$$\Leftrightarrow v_n - v_n u_n = u_n$$ → Je développe.

$$\Leftrightarrow u_n + v_n u_n = v_n$$ → Je regroupe les u_n à gauche.

$$\Leftrightarrow u_n(1+v_n) = v_n$$ → Je factorise.

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1+v_n} \quad \text{car } v_n \neq -1$$ → J'isole u_n avec la division.

D'après le ***c)*** , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3^n}{1+3^n}$.

d. Forme indéterminée $\dfrac{(\infty)}{(\infty)}$, c'est 3^n qui va jouer le terme de plus haut degré : $\dfrac{3^n}{1+3^n} = \dfrac{3^n}{3^n\left(\frac{1}{3^n}+1\right)} = \dfrac{1}{\frac{1}{3^n}+1}$.

$3 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ et donc par inverse $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$

donc, par somme puis par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{3^n}+1} = 1$.

---

⑫ **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$$

$$= \frac{\dfrac{u_n+2}{2u_n+1}-1}{\dfrac{u_n+2}{2u_n+1}+1}$$

$$= \frac{\dfrac{u_n+2-2u_n-1}{2u_n+1}}{\dfrac{u_n+2+2u_n+1}{2u_n+1}}$$

$$= \frac{-u_n+1}{\cancel{2u_n+1}} \times \frac{\cancel{2u_n+1}}{3u_n+3}$$

$$= \frac{-u_n+1}{3u_n+3}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{-u_n+1}{3u_n+3}$$

$$= \frac{-(u_n-1)}{3(u_n+1)}$$

$$= -\frac{1}{3} \times \frac{u_n-1}{u_n+1}$$

$$= -\frac{1}{3}v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times (-\frac{1}{3})^n = \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{3})^n$. → Attention, cette expression ne peut pas se simplifier.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1} = \frac{-1 - \frac{1}{3} \times (-\frac{1}{3})^n}{\frac{1}{3} \times (-\frac{1}{3})^n - 1} = \frac{\frac{-3 - (-\frac{1}{3})^n}{3}}{\frac{(-\frac{1}{3})^n - 3}{3}} = \frac{-3 - (-\frac{1}{3})^n}{(-\frac{1}{3})^n - 3}$$

→ Je réduis au dénominateur 3 en haut et en bas.

$-1 < -\frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-\frac{1}{3})^n = 0$

et donc par somme $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} (-3 - (-\frac{1}{3})^n) = -3 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} ((-\frac{1}{3})^n - 3) = -3 \end{cases}$

donc, par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-3 - (-\frac{1}{3})^n}{(-\frac{1}{3})^n - 3} = 1$.

---

⑬ **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1} - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - v_n} - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - v_n} - \frac{3(6 - v_n)}{6 - v_n}} = \frac{1}{\frac{9 - 18 + 3v_n}{6 - v_n}} = \frac{6 - v_n}{-9 + 3v_n}$$

On se retrouve avec une expression dans laquelle il est difficile de faire apparaître w_n ...

Mais l'énoncé me dit qu'elle doit être arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

<u>1ère méthode</u> : calculer $w_{n+1} - w_n$ pour voir si ça ne fait pas $-\frac{1}{3}$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{6 - v_n}{-9 + 3v_n} - \frac{1}{v_n - 3}$$
$$= \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)} - \frac{1}{v_n - 3}$$

→ La réduction au même dénominateur est nettement moins sympa...

$$= \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)} - \frac{3}{3(v_n - 3)}$$
$$= \frac{3 - v_n}{3(v_n - 3)}$$
$$= \frac{-\cancel{(v_n - 3)}}{3\cancel{(v_n - 3)}}$$

→ Ouf...

$$= -\frac{1}{3}$$

<u>2ème méthode</u> : calculer $w_n - \frac{1}{3}$ pour voir si ça ne fait pas la même chose...

$$w_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{v_n - 3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3(v_n - 3)} - \frac{v_n - 3}{3(v_n - 3)} = \frac{3 - v_n + 3}{3v_n - 9} = \frac{6 - v_n}{-9 + 3v_n} = w_{n+1}$$

Donc, (w_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $w_0 = \frac{1}{v_0 - 3} = -\frac{1}{2}$.

b. • On déduit du **a.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + n \times (-\frac{1}{3})$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{n}{3}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3} \Leftrightarrow w_n (v_n - 3) = 1$$
$$\Leftrightarrow w_n v_n - 3w_n = 1$$
$$\Leftrightarrow w_n v_n = 1 + 3w_n$$
$$\Leftrightarrow v_n = \frac{1 + 3w_n}{w_n}$$

• On en déduit :

$$v_n = \frac{1 + 3(-\frac{1}{2} - \frac{n}{3})}{-\frac{1}{2} - \frac{n}{3}} = \frac{\frac{-6n - 3}{6}}{\frac{-3 - 2n}{6}} = \frac{-6n - 3}{-3 - 2n} = \frac{6n + 3}{2n + 3}$$

c. $$\frac{6n + 3}{2n + 3} = \frac{\cancel{n}(6 + \frac{3}{n})}{\cancel{n}(2 + \frac{3}{n})} = \frac{6 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{3}{n}}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc, par somme, $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} (6 + \frac{3}{n}) = 6 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (2 + \frac{3}{n}) = 2 \end{cases}$

et par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{6}{2} = 3$.

---

⑭ **a.** *La question* **b.** *est orientée vers une démonstration par récurrence. Mais pas la question* **a.** *. C'est une démonstration directe.*

$$2n^2 - (n + 1)^2 = 2n^2 - n^2 - 2n - 1$$
$$= n^2 - 2n - 1$$

→ *Un polynôme du second degré et un signe positif ? Souvenirs de 1ère...*

C'est un polynôme du second degré, du signe de son coefficient dominant 1 positif à l'extérieur de ses racines.

$\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times(-1) = 8 > 0$

donc il y a deux racines $\frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2\times1} = -0,4\ldots$ et $\frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2\times1} = 2,4\ldots$

On en déduit que $2n^2 - (n + 1)^2$ est positif et donc que $2n^2 \geqslant (n + 1)^2$ pour tout entier n supérieur à 2,4… et donc supérieur ou égal à 3.

b. On pose $\mathscr{P}(n) : 2^n \geqslant n^2$, la comparaison à démontrer.

• Initialisation :

$\begin{cases} 2^4 = 16 \\ 4^2 = 16 \end{cases}$ donc $2^4 \geqslant 4^2$

donc $\mathscr{P}(4)$ est vraie.

• Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un n quelconque supérieur ou égal à 4 .

Alors :

$2^n \geqslant n^2$ par hypothèse de récurrence

donc $2\times2^n \geqslant 2n^2$

donc $2^{n+1} \geqslant 2n^2$ → *Surtout, n'oubliez pas que vous êtes dans une question* **b.** *qui vient après une question* **a.** ...

Or, on a vu dans la question **a.** que $2n^2 \geqslant (n + 1)^2$ pour tout entier n supérieur ou égal à 3 et donc supérieur ou égal à 4.

Donc $2^{n+1} \geqslant (n + 1)^2$.

Donc $\mathscr{P}(n + 1)$ vraie.

• Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 4$.

c. D'après la question **b.** , pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$2^n \geqslant n^2$

$\Rightarrow\ 0 < \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}+*$

$\Rightarrow\ 0 \leqslant 100n\dfrac{1}{2^n} \leqslant 100n\dfrac{1}{n^2}$ car $100n$ positif

$\Rightarrow\ 0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqslant \dfrac{100}{n}$

d.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{100}{n} = 0$

  donc, par encadrement de $100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ entre 0 et $\dfrac{100}{n}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. → Ou « d'après le théorème des gendarmes » .

- $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 110\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

- On en déduit par somme :

  $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[\, 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \,\right] = 340$.

  La suite (a_n) converge vers 340.

---

⑮ **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} \\ &= a\,u_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= a\,u_n + \frac{b\,(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a} \\ &= a\,u_n + \frac{-ab}{1-a} \\ &= a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) \\ &= a\,v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison a .

b. On déduit du **a.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times a^n$.

Or, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a} \Leftrightarrow u_n = v_n + \dfrac{b}{1-a}$

Donc $u_n = v_0 \times a^n + \dfrac{b}{1-a}$.

$a \in\,]-1\,;1[$ donc $-1 < a < 1$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$

donc par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_0 \times a^n = 0$

donc par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(v_0 \times a^n + \frac{b}{1-a}\right) = \frac{b}{1-a}$.