Correction de **SUITES - Fiche 1**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳

① N'oubliez pas les nombreux détails de rédaction... Ils sont soulignés en vert.

On pose $\mathscr{P}(n)$: $p_n > 0{,}25$, la comparaison à démontrer. → Je pose $\mathscr{P}(n)$, ça sera pratique pour rédiger.

- Initialisation :

  $p_1 = 1 > 0{,}25$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie. → Attention, ça commence à 1 et non à 0.

- Itération :

  Supposons $\mathscr{P}(n)$: $p_n > 0{,}25$ pour un certain entier $n \geqslant 1$ quelconque. Attention, surtout pas « tout » ! On sera sans pitié...
  Montrons $\mathscr{P}(n+1)$: $p_{n+1} > 0{,}25$.
  Alors :

  Méthode A : On part de $p_n > 0{,}25$ qu'il faut transformer en $p_{n+1} > 0{,}25$.

  $p_n > 0{,}25$ par hypothèse de récurrence
  donc $0{,}8p_n > 0{,}8\times 0{,}25$ → Multiplication par 0,8 de chaque côté.
  donc $0{,}8p_n + 0{,}05 > 0{,}2 + 0{,}05$ → Addition de 0,05 de chaque côté.
  donc $p_{n+1} > 0{,}25$

  Les ⇔ sont ici valides, mais les « donc » suffisent et évitent les ennuis.

- Conclusion :

  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

  Ça, ce n'est pas un détail de rédaction ! C'est indispensable...

② L'énoncé ne précise pas qu'il faut faire une démonstration par récurrence... Mais la suite est définie **par récurrence** !
On sent bien que chaque propriété de u_n viendra du terme précédent, qui vient elle-même du terme encore avant, etc... depuis le premier terme.

On pose $\mathscr{P}(n)$: $u_n < 1$, la comparaison à démontrer. → On peut dire aussi la majoration à démontrer.

- Initialisation :
  $u_0 = \frac{2}{5} < 1$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

  Supposons $\mathscr{P}(n)$: $u_n < 1$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.
  Montrons $\mathscr{P}(n+1)$: $u_{n+1} < 1$.
  Alors :

  Méthode A :

  $u_n < 1$ par hypothèse de récurrence
  donc $\frac{1}{5}u_n < \frac{1}{5}$
  donc $\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} < \frac{3}{5}$
  donc $u_{n+1} < 1$

- Conclusion :

  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc, la suite (u_n) est majorée par 1 .

③ **a.** On pose $\mathscr{P}(n)$: $u_n \geqslant 0$, la comparaison à démontrer.

- Initialisation :

  $u_0 = 0 \geqslant 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

  Supposons $\mathscr{P}(n)$: $u_n \geqslant 0$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.
  Montrons $\mathscr{P}(n+1)$: $u_{n+1} \geqslant 0$.
  Alors :

  Méthode A :

  $u_n \geqslant 0$ par hypothèse de récurrence
  donc $u_n + 1 \geqslant 1$
  donc $\frac{1}{u_n+1} \leqslant \frac{1}{1}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}+^*$ → Changement d'ordre à justifier proprement...
  donc $\frac{-5}{u_n+1} \geqslant -5$ car -5 négatif → Justification pas indispensable...
  donc $6 - \frac{5}{u_n+1} \geqslant 6-5$
  donc $u_{n+1} \geqslant 1$
  donc $u_{n+1} \geqslant 0$

Méthode B : Montrons-la par curiosité : on part de u_{n+1} et va démontrer qu'il est positif, en le factorisant, bien sûr...

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 6 - \frac{5}{u_n+1} \\ &= \frac{6(u_n+1)}{u_n+1} - \frac{5}{u_n+1} \\ &= \frac{6u_n+6-5}{u_n+1} \\ &= \frac{6u_n+1}{u_n+1} \end{aligned}$$

→ Un numérateur et un dénominateur dont il faut étudier les signes...

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 0$

donc $\begin{cases} 6u_n+1 \geqslant 0 \\ u_n+1 > 0 \end{cases}$, donc $\dfrac{6u_n+1}{u_n+1} \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} \geqslant 0$.

Ça fonctionne bien, mais c'est nettement moins naturel que la méthode A .

- Conclusion :

  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

b. On pose $\mathscr{Q}(n)$: $u_n \leqslant u_{n+1}$, la comparaison à démontrer.

- Initialisation :

  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 6 - \dfrac{5}{0+1} = 1 \end{cases}$ donc $u_0 \leqslant u_1$, donc $\mathscr{Q}(0)$ est vraie.

- Itération :

  Supposons $\mathscr{Q}(n)$: $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$. → $\mathscr{Q}(n)$ s'écrit en fonction de u_n et de u_{n+1} !
  Montrons $\mathscr{Q}(n+1)$: $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. → Pour écrire $\mathscr{Q}(n+1)$, on passe aux deux rangs suivants, donc en utilisant u_{n+1} et u_{n+2} ...
  Alors :

  Méthode A :

  $u_n \leqslant u_{n+1}$ par hypothèse de récurrence

  donc $u_n + 1 \leqslant u_{n+1} + 1$

  donc $\dfrac{1}{u_n+1} \geqslant \dfrac{1}{u_{n+1}+1}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}+^*$

  donc $\dfrac{-5}{u_n+1} \leqslant \dfrac{-5}{u_{n+1}+1}$ car -5 négatif

  donc $6 - \dfrac{5}{u_n+1} \leqslant 6 - \dfrac{5}{u_{n+1}+1}$

  donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$

- Conclusion :

  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Remarque : Les techniques pour les deux questions sont les mêmes, on aurait pu les traiter en une seule question, comme vous le ferez dans le ④.

---

④ On pose $\mathscr{P}(n)$: $0 < y_n \leqslant 2$, l'encadrement à démontrer. → Démontrer un encadrement revient à démontrer deux comparaisons en même temps.

- Initialisation :

  $y_0 = \sqrt{2} = 1{,}4\ldots$ donc $0 < y_0 \leqslant 2$,
  donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

  Supposons $\mathscr{P}(n)$: $0 < y_n \leqslant 2$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.
  Montrons $\mathscr{P}(n+1)$: $0 < y_{n+1} \leqslant 2$.
  Alors :

  Retenez le principe du QUI PEUT LE PLUS PEUT LE MOINS.

  Si y_{n+1} est plus grand que $\sqrt{2}$ qui est lui-même plus grand que 0, alors y_{n+1} est plus grand que 0.

  Méthode A :

  $0 < y_n \leqslant 2$ par hypothèse de récurrence

  donc $2 < 2 + y_n \leqslant 4$

  donc $\sqrt{2} < \sqrt{2+y_n} \leqslant \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$

  donc $0 < y_{n+1} \leqslant 2$ → Attention à ne pas finir par $\sqrt{2} < y_{n+1} \leqslant 2$ car ce n'est pas ce qui vous avez annoncé montrer.

- Conclusion :

  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

---

⑤ **a.** Max a coupé un quart de la hauteur de la plante, il reste donc $\frac{3}{4}$ de sa hauteur, puis la plante a poussé de 30 cm :

$\dfrac{3}{4} \times 80 + 30 = 60 + 30 = 90$

La plante mesure donc 90 cm en mars 2016.

b. En mars (2015 + n), Max coup un quart de la hauteur h_n de la plante, il reste donc $\frac{3}{4}$ de h_n , puis la plante a poussé de 30 cm :

Donc $h_{n+1} = \frac{3}{4} h_n + 30 = 0{,}75\, h_n + 30$.

c. On remplit un tableau des premières valeurs :

n	0	1	2	3
h_n	80	90	0,75×90 + 30 = 97,5	0,75×97,5 + 30 = 103,125

On conjecture que la suite est croissante.

On demande de démontrer cette croissance par récurrence...
Pour voir la propriété qui dépend de l'entier n , il faut se souvenir qu'une **croissance** est caractérisée par la **comparaison** $h_n \leqslant h_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$!

Posons $\mathscr{P}(n)$: $h_n \leqslant h_{n+1}$.

- Initialisation :

$\begin{cases} h_0 = 80 \\ h_1 = 90 \end{cases}$ donc $h_0 < h_1$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $h_n \leqslant h_{n+1}$ pour un certain entier $n \geqslant 0$ quelconque. → Si vous visualisez bien $\mathscr{P}(n+1)$, vous pouvez ne pas l'écrire...
Alors :

Mais si ça vous aide, écrivez-le !

Méthode A : Même situation qu'au ③ **b.**

$h_n \leqslant h_{n+1}$ par hypothèse de récurrence
donc $0{,}75 h_n \leqslant 0{,}75 h_{n+1}$
donc $0{,}75 h_n + 30 \leqslant 0{,}75 h_{n+1} + 30$
donc $h_{n+1} \leqslant h_{n+2}$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie. → ... mais vous concluez.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et donc, la suite est croissante. → N'oubliez pas la conclusion finale...

---

⑥ **a.** On pose $\mathscr{P}(n)$: $a_n > 0$, la stricte positivité à démontrer.

- Initialisation :

$a_1 = \frac{1}{2} > 0$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$ quelconque. → Si vous visualisez bien $\mathscr{P}(n)$, vous pouvez ne pas l'écrire...
Alors :

Méthode A :

$a_n > 0$ par hypothèse de récurrence → ... c'est par quoi vous commencez.

donc $\frac{n+1}{2n} a_n > 0$ car $\frac{n+1}{2n}$ toujours positif

donc $a_{n+1} > 0$ → C'est parfois très rapide !

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

Méthode B : Pour une fois, elle est presque plus naturelle !

$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n} a_n$

Or $\begin{cases} \frac{n+1}{2n} \text{ toujours positif} \\ a_n > 0 \text{ par hypothèse de récurrence} \end{cases}$, donc, par produit, $a_{n+1} > 0$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Donc, (a_n) est strictement positive.

b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

1ère méthode : On pense à étudier le signe de $a_{n+1} - a_n$.

$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2n} a_n - a_n$ → C'est une démonstration directe !

$= \left(\frac{n+1}{2n} - 1 \right) a_n$

$= \frac{-n+1}{2n} a_n$

Aucune indication de récurrence n'était donnée pour ces deux questions.
On doit sentir que la question **a.** se fait par récurrence : le signe d'un terme dépend du précédent, qui lui-même dépend du précédent **ainsi de suite** jusqu'au signe de a_2 qui dépend de celui de a_1 .

Pour la question **b.** , on voit que ce n'est qu'une histoire entre a_{n+1} et a_n .
Pas besoin du principe de récurrence avec les rangs précédents.

Or : $\begin{cases} 2n > 0 \text{ car } n \text{ non nul} \\ n \geqslant 1 \Rightarrow -n+1 \leqslant 0 \\ a_n > 0 \text{ d'après la question précédente} \end{cases}$

donc, par produit et quotient, $\dfrac{-n+1}{2n} a_n \leqslant 0$

et donc $a_{n+1} \leqslant a_n$.

2ème méthode : Elle est très simple, mais il faut voir que a_{n+1} est a_n multiplié par un nombre... Étudions ce nombre :

$n+1 \leqslant 2n \Leftrightarrow n \geqslant 1$

Donc, pour $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{n+1}{2n} \leqslant 1$.

Donc $\dfrac{n+1}{2n} a_n \leqslant a_n$ → Quand on multiplie par un nombre inférieur à 1, cela diminue !

et donc $a_{n+1} \leqslant a_n$.

---

⑦ On pose $\mathscr{P}(n)$: $u_n > 0$, la comparaison à démontrer.

- Initialisation :

$u_1 = \dfrac{1}{3} \times 1 + 0 - 2 = -\dfrac{5}{3}$

$u_2 = \dfrac{1}{3} \times (-\dfrac{5}{3}) + 1 - 2 = -\dfrac{14}{9}$

$u_3 = \dfrac{1}{3} \times (-\dfrac{14}{9}) + 2 - 2 = -\dfrac{14}{27}$

$u_4 = \dfrac{1}{3} \times (-\dfrac{14}{27}) + 3 - 2 = \dfrac{67}{81} > 0$

donc $\mathscr{P}(4)$ est vraie. → Attention, ça commence à 4 et non à 0.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain n quelconque supérieur ou égal à 4 .
Alors :

Méthode A :

$u_n > 0$ par hypothèse de récurrence

donc $\dfrac{1}{3} u_n > 0$

donc $\dfrac{1}{3} u_n + n > 4$ car $n \geqslant 4$ → Heureusement que ça commence à 4... N'oubliez pas de le signaler...

donc $\dfrac{1}{3} u_n + n - 2 > 2$

donc $u_{n+1} > 0$

C'est le principe du " QUI PEUT LE PLUS PEUT LE MOINS ".
Si quelque chose est plus grand que 2.
alors a fortiori il est plus grand que 0.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

Méthode B : C'est ici la plus naturelle, avec une somme de deux termes positifs.

$u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n + n - 2$

Or $\begin{cases} \dfrac{1}{3} u_n > 0 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ n \geqslant 4 \Rightarrow n-2 \geqslant 2 > 0 \end{cases}$ donc, par somme, $u_{n+1} > 0$.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 4$.

---

⑧ On pose $\mathscr{P}(n)$: $u_{n+1} > u_n$, la comparaison à démontrer.

- Initialisation :

$u_1 = 0{,}5 \times 5 + 0{,}5 \times 0 - 1{,}5 = 1$
$u_2 = 0{,}5 \times 1 + 0{,}5 \times 1 - 1{,}5 = -0{,}5$
$u_3 = 0{,}5 \times (-0{,}5) + 0{,}5 \times 2 - 1{,}5 = -0{,}75$
$u_4 = 0{,}5 \times (-0{,}75) + 0{,}5 \times 3 - 1{,}5 = -0{,}375$

Donc $u_4 > u_3$, donc $\mathscr{P}(3)$ est vraie. → Attention, ça commence à 3 et non à 0.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain n quelconque supérieur ou égal à 3 .
Alors :

Attention, vous aimeriez ajouter
$0{,}5\,(n+1)$ à gauche
et $0{,}5\,n$ à droite,
mais vous êtes obligés d'ajouter la même chose des deux côtés !

Méthode A :

$u_{n+1} > u_n$ par hypothèse de récurrence

donc $0{,}5 u_{n+1} > 0{,}5 u_n$

donc $0{,}5 u_{n+1} + 0{,}5\,(n+1) > 0{,}5 u_n + 0{,}5\,(n+1)$

donc $0{,}5 u_{n+1} + 0{,}5\,(n+1) > 0{,}5 u_n + 0{,}5 n + 0{,}5$

donc $0{,}5 u_{n+1} + 0{,}5\,(n+1) > 0{,}5 u_n + 0{,}5 n$ → Principe du " Qui peut le plus peut le moins ".

donc $0{,}5u_{n+1} + 0{,}5\,(n+1) - 1{,}5 \;>\; 0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5$

donc $u_{n+2} \;>\; u_{n+1}$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

Méthode B : Toujours moins naturelle, mais pour une fois bien plus facile ! Il faut donc ne pas l'oublier...

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= (0{,}5u_{n+1} + 0{,}5\,(n+1) - 1{,}5) - (0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5) \\ &= 0{,}5u_{n+1} + 0{,}5n + 0{,}5 - 1{,}5 - 0{,}5u_n - 0{,}5n + 1{,}5 \\ &= 0{,}5\,(u_{n+1} - u_n) + 0{,}5 \end{aligned}$$

$\begin{cases} \text{Par hypothèse de récurrence, } u_{n+1} > u_n \text{ et donc } u_{n+1} - u_n > 0 \\ 0{,}5 > 0 \end{cases}$ donc, par somme, $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$ et donc $u_{n+2} > u_{n+1}$.

Avez-vous remarqué que, une fois n'est pas coutume,
on a étudié LE SIGNE D'UNE SOMME SANS FACTORISER !
Mais une somme de deux termes positifs, c'est assez rare...

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

On peut en déduire que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 3.

---

⑨ On pose $\mathscr{P}(n)$: $u_n - 1 > 0$, la comparaison à démontrer.

- Initialisation :

$u_0 = 5$ donc $u_0 - 1 = 4 > 0$,
donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $u_n - 1 > 0$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.
Alors :

Attention ! On pourrait avoir envie de passer de $u_n > 1$ à $u_{n+1} > 1$ avec la Méthode A habituelle, mais elle ne fonctionne pas...
En effet, de $u_n > 1$, on déduit facilement que $4u_n - 1 > 3$ et que $\dfrac{1}{u_n+2} < \dfrac{1}{3}$, mais on ne peut rien en déduire du produit $\dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ ...
De manière générale, si $\begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases}$, alors on ne peut pas comparer les produits $a\times c$ et $b\times d$.
Regardez : $\begin{cases} 2 > 1 \\ 3 < 4 \end{cases}$ et on a $2\times3 > 1\times4$, mais $\begin{cases} 2 > 1 \\ 3 < 7 \end{cases}$ et on a $2\times3 < 1\times7$!

Méthode B :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 \\ &= \frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} \\ &= \frac{3u_n - 3}{u_n + 2} \\ &= \frac{3\,(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n - 1 > 0$. → L'hypothèse de récurrence n'intervient qu'à la fin du calcul.
On en déduit de plus que $u_n > 1$ et donc $u_n + 2 = 3 > 0$.
Donc par quotient, $\dfrac{3\,(u_n - 1)}{u_n + 2} > 0$, et donc $u_{n+1} - 1 > 0$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

---

⑩ **a.** 1ère méthode :

f est une fonction polynôme du second degré de coefficient dominant $-0{,}005$ négatif.

Son sommet a pour abscisse $-\dfrac{1{,}4}{2\times(-0{,}05)} = 14$.

Donc f est croissante sur $]-\infty\,;14[$ et décroissante sur $]14\,;+\infty[$.

Elle est donc croissante sur $[0\,;8]$.

2ème méthode :

f fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 1{,}4 - 2\times0{,}05x = -0{,}1x + 1{,}4$.

$f'(x) = 0 \iff -0{,}1x + 1{,}4 = 0$
$\iff x = 14$

Donc $f'(x)$ positif sur $]-\infty\,;14[$ et négatif sur $]14\,;+\infty[$, → On pouvait faire un tableau de variations.
donc f est croissante sur $]-\infty\,;14[$ et décroissante sur $]14\,;+\infty[$,
donc f est croissante sur $[0\,;8]$.

b. On pose $\mathscr{P}(n)$: $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$, l'encadrement à démontrer.

- Initialisation :

$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_1 = 1{,}4\times 6 - 0{,}05\times 6^2 = 6{,}6 \end{cases}$ donc $0 \leqslant v_0 < v_1 \leqslant 8$,

donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.
Alors :

Méthode A :

$0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$ par hypothèse de récurrence

donc $f(0) \leqslant f(v_n) < f(v_{n+1}) \leqslant f(8)$ car la fonction f est croissante sur $[\,0\,;8\,]$

donc $0 \leqslant v_{n+1} < v_{n+2} \leqslant 8$ car $f(8) = 1{,}4\times 8 - 0{,}05\times 8^2 = 8$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

Un grand classique :
lorsqu'une variation de fonction f est demandée avant et que cette fonction sert à exprimer $u_{n+1} = f(u_n)$, vous devez utiliser la ***Méthode A****.*

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

---

⑪ **a.** $f = u + v$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto \dfrac{x}{2} \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = \dfrac{1}{2} \\ v : x \mapsto \dfrac{1}{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } v'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \end{cases}$

donc f dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $f' = u' + v'$.

Donc $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2}$

$= \dfrac{x^2 - 2}{2x^2}$

$2x^2$ toujours positif, donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2$.
Or, $x^2 - 2$ est du signe de son coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur de ses racines $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

x	0		$\sqrt{2}$		8
Signes de f'	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	

$f(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

b. On pose $\mathscr{P}(n)$: $U_n \geqslant \sqrt{2}$, la comparaison à démontrer.

- Initialisation :

$U_1 = \dfrac{U_0}{2} + \dfrac{1}{U_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4} + 2 = 2{,}25 \geqslant \sqrt{2}$,

donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $U_n \geqslant \sqrt{2}$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.
Alors :

Méthode A : Celle qu'il faut utiliser lorsqu'on a une fonction croissante ou décroissante.

$U_n \geqslant \sqrt{2}$ par hypothèse de récurrence

donc $f(U_n) \geqslant f(\sqrt{2})$ car la fonction f est croissante sur $[\sqrt{2}\,;+\infty\,[$

donc $U_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

---

⑫ **a.** On pose $\mathscr{P}(n)$: $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$, l'encadrement à démontrer.

- Initialisation :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ 1 \leqslant 1 \leqslant \mathrm{e}^2 = 7{,}3\ldots \end{cases}$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.

Alors :

$1 \leqslant u_n \leqslant e^2$ par hypothèse de récurrence

donc $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{e^2}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$

donc $1 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant e$

donc $e \leqslant e\sqrt{u_n} \leqslant e^2$ car $e > 0$

donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant e^2$ car $e > 1$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. On pose $\mathscr{Q}(n)$: $u_n \leqslant u_{n+1}$.

- Initialisation :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = e\sqrt{u_0} = e \end{cases}$ donc $u_0 \leqslant u_1$, donc $\mathscr{Q}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{Q}(n)$ vraie pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.
Alors :

$u_n \leqslant u_{n+1}$ par hypothèse de récurrence

donc $\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{u_{n+1}}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$

donc $e\sqrt{u_n} \leqslant e\sqrt{u_{n+1}}$ car $e > 0$

donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$

Donc $\mathscr{Q}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

⑬ **a.** On pose $\mathscr{P}(n)$: $0 \leqslant w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant 0{,}5$, l'encadrement à démontrer.

- Initialisation :

$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = e^{2w_0 - 2} = e^{-2} = 0{,}13\ldots \end{cases}$ donc $0 \leqslant w_0 \leqslant w_1 \leqslant 0{,}5$ et donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.
Alors :

$0 \leqslant w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant 0{,}5$ par hypothèse de récurrence

donc $0 \leqslant 2w_n \leqslant 2w_{n+1} \leqslant 1$

donc $-2 \leqslant 2w_n - 2 \leqslant 2w_{n+1} - 2 \leqslant -1$

donc $e^{-2} \leqslant e^{2w_n - 2} \leqslant e^{2w_{n+1} - 2} \leqslant e^{-1}$ car la fonction exponentielle est croissante $= 0{,}3\ldots$

donc $0 \leqslant 2w_{n+1} \leqslant 2w_{n+2} \leqslant 0{,}5$ car $e^{-1} = 0{,}3\ldots < 0{,}5$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

⑭ **a.** On pose $\mathscr{P}(n)$: $u_n > 0$, la comparaison à démontrer.

- Initialisation :

$u_0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.
Alors :

$\begin{cases} u_n > 0 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ e^{-u_n} > 0 \text{ car la fonction exponentielle est strictement positive} \end{cases}$

donc, par produit, $u_n e^{-u_n} > 0$.

donc $u_{n+1} > 0$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. *Si vous essayez de démontrer cette question par récurrence, vous verrez que pour montrer l'itération. vous n'utilisez pas l'hypothèse de récurrence.*
C'est le signe que ce n'est pas une démonstration par récurrence...

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_n - u_{n+1} = u_n - u_n e^{-u_n}$

$= u_n (1 - e^{-u_n})$ → *C'est un produit, étudions le signe de chaque facteur.*

- D'une part, $u_n > 0$ d'après le **a.**

- D'autre part, $u_n > 0$ d'après le **a.**
  donc $-u_n < 0$
  donc $e^{-u_n} < 1$
  donc $1 - e^{-u_n} > 0$

On en déduit par produit : $u_n\,(1 - e^{-u_n}) > 0$
et donc $u_n - u_{n+1} > 0$
et donc $u_n > u_{n+1}$.

Et donc la suite (u_n) est décroissante.

---

⑮ On pose $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$ l'égalité à démontrer.

- Initialisation :

$\begin{cases} u_0 = 13 \\ 1 + \dfrac{12}{5^0} = 1 + \dfrac{12}{1} = 13 \end{cases}$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.

Montrons $\mathscr{P}(n+1)$: $u_{n+1} = 1 + \dfrac{12}{5^{n+1}}$.

Alors :

Méthode A :

$u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$ par hypothèse de récurrence

donc $\dfrac{1}{5}u_n = \dfrac{1}{5}\left(1 + \dfrac{12}{5^n}\right)$ → Je multiplie par $\dfrac{1}{5}$ des deux côtés.

donc $\dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{12}{5\times 5^n} + \dfrac{4}{5}$ → J'ajoute $\dfrac{4}{5}$ des deux côtés.

donc $u_{n+1} = 1 + \dfrac{12}{5^{n+1}}$ → Bingo...

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

Méthode B : C'est ici la plus naturelle.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) + \frac{4}{5} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{12}{5\times 5^n} + \frac{4}{5} \\ &= 1 + \frac{12}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

---

⑯ On pose $\mathscr{P}(n)$: $3u_n = 10^{n+1} - 7$ l'égalité à démontrer.

- Initialisation :

$\begin{cases} 3u_0 = 3\times 1 = 3 \\ 10^{0+1} - 7 = 10 - 7 = 3 \end{cases}$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $3u_n = 10^{n+1} - 7$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.

Montrons $\mathscr{P}(n+1)$: $3u_{n+1} = 10^{n+2} - 7$. → Au rang suivant, n passe à $n+1$ et $n+1$ passe à $n+2$.

Alors :

Méthode A : Le facteur 3 est fort gênant... On peut décider de s'en débarrasser :

$3u_n = 10^{n+1} - 7$ par hypothèse de récurrence

donc $u_n = \dfrac{1}{3}(10^{n+1} - 7)$ → J'élimine la multiplication par 3 pour isoler u_n .

donc $10u_n = 10\times\dfrac{1}{3}(10^{n+1} - 7)$ → Je multiplie par 10 des deux côtés.

donc $10u_n + 21 = \dfrac{1}{3}(10\times 10^{n+1} - 70) + 21$ → J'ajoute 21 des deux côtés.

donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(10^{n+2} - 70) + \dfrac{1}{3}\times 63$

donc $3u_{n+1} = 10^{n+2} - 70 + 63$ → Je multiplie par 3 des deux côtés.

donc $3u_{n+1} = 10^{n+2} - 7$ → J'obtiens $\mathscr{P}(n+1)$.

Méthode A : Ou on peut le garder :

$3u_n = 10^{n+1} - 7$ par hypothèse de récurrence

donc $10 \times 3u_n = 10(10^{n+1} - 7)$ → Je multiplie par 10 des deux côtés.

donc $10 \times 3u_n = 10^{n+2} - 70$

donc $10 \times 3u_n + 21 \times 3 = 10^{n+2} - 70 + 21 \times 3$ → Au lieu d'ajouter 21, j'ajoute 21×3 des deux côtés.

donc $3(10u_n + 21) = 10^{n+2} - 7$ → Je factorise par 3.

donc $3u_{n+1} = 10^{n+2} - 7$ → J'obtiens $\mathscr{P}(n+1)$.

Méthode B : C'est ici la plus naturelle.

$$\begin{aligned} 3u_{n+1} &= 3(10u_n + 21) \\ &= 3 \times 10u_n + 63 \\ &= 10 \times 3u_n + 63 \\ &= 10(10^{n+1} - 7) + 63 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 10^{n+2} - 70 + 63 \\ &= 10^{n+2} - 7 \end{aligned}$$

→ Pensez à faire apparaître $3u_n$ sur lequel vous avez votre hypothèse de récurrence.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

---

⑰ On pose $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 4n^2 + 12n + 5$ l'égalité à démontrer.

- Initialisation :

$\begin{cases} u_0 = 5 \\ 4 \times 0^2 + 12 \times 0 + 5 = 5 \end{cases}$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 4n^2 + 12n + 5$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.

Montrons $\mathscr{P}(n+1)$: $u_n = \underbrace{4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5}$, c'est-à-dire $u_n = 4n^2 + 20n + 21$.

Alors :

Inutile d'espérer tomber sur cette expression !
Il faut absolument la développer...

Méthode B :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) u_n + \frac{6}{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)(4n^2 + 12n + 5) + \frac{6}{n+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n+1+2}{n+1}(4n^2 + 12n + 5) + \frac{6}{n+1} \\ &= \frac{(n+3)(4n^2 + 12n + 5) + 6}{n+1} \\ &= \frac{4n^3 + 24n^2 + 41n + 21}{n+1} \end{aligned}$$

→ On est mal... du 3ème degré à factoriser... On espérait voir $4n^2 + 20n + 21$ ...

D'autre part : → Contournons la difficulté ! Pour démontrer que $A = B$, on peut démontrer que $A = C$ et que $B = C$.

$$\begin{aligned} 4n^2 + 20n + 21 &= \frac{(4n^2 + 20n + 21)(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{4n^3 + 4n^2 + 20n^2 + 20n + 21n + 21}{n+1} \\ &= \frac{4n^3 + 24n^2 + 41n + 21}{n+1} \end{aligned}$$

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Ne vous inquiétez pas, c'est un vieil exercice de 2008 qui a dû poser des problèmes à vos aînés...
Vous n'aurez pas quelque chose d'aussi difficile au Bac, mais c'est un entrainement pour plus tard...

---

⑱ **1.** On pose $\mathscr{P}(n)$: $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ l'égalité à démontrer.

- Initialisation :

$\begin{cases} \text{Pour } n = 1 \text{, la somme est réduite à } 1 \\ \dfrac{1(1+1)}{2} = 1 \end{cases}$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie. → Attention, il faut envisager une somme à un seul terme.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour un certain entier $n \geqslant 1$ quelconque.

Montrons $\mathscr{P}(n+1)$: $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$, c'est-à-dire $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Alors :

Méthode A :

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$ par hypothèse de récurrence

donc $1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$ → J'ajoute des deux côtés $(n+1)$.

$= (n+1)(\frac{n}{2}+1)$ → Je factorise par $(n+1)$.

$= (n+1)\frac{n+2}{2}$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Méthode B :

$1+2+3+\ldots+n+(n+1)$

$= \frac{n(n+1)}{2}+n+1$ par hypothèse de récurrence

$= (n+1)(\frac{n}{2}+1)$ → Mêmes calculs.

$= (n+1)\frac{n+2}{2}$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

2.
- On pose $\mathscr{P}(n)$: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ l'égalité à démontrer.
- Initialisation :

$$\begin{cases} 1^2 = 1 \\ \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = 1 \end{cases}$$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie. → Attention, ça commence aussi à 1 et non à 0.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour un certain n quelconque supérieur ou égal à 1.

Montrons $\mathscr{P}(n+1)$: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$

$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Alors :

Méthode B :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2$$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$ par hypothèse de récurrence

$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$

$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

Le polynôme $2n^2+7n+6$ a pour discriminant $\Delta = 7^2-4\times2\times6 = 1$ et pour racines $\frac{-7+\sqrt{1}}{2\times2} = -\frac{3}{2}$ et $\frac{-7-\sqrt{1}}{2\times2} = -2$.

On en déduit $2n^2+7n+6 = 2(n+\frac{3}{2})(n+2)$

$= (2n+3)(n+2)$ → C'est bien ce qu'on attendait.

$= [(n+1)+1][2(n+1)+1]$

Remarque : Au lieu de factoriser, on peut développer $[(n+1)+1][2(n+1)+1]$ et obtenir $2n^2+7n+6$.

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$

Méthode A : Comme dans le **1.**, on part de $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et on ajoute des deux côtés $(n+1)^2$.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

3. $1+3=4$
$1+3+5=9$
$1+3+5+7=16$
$1+3+5+7+9=25$ → Tiens, tiens… On dirait bien que ce sont toujours des carrés !

Regardez ça : $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29 = 225$ … le carré de 15 !

Et : $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33+35+37+39+41 = 441$ … le carré de 21 !

- On pose $\mathscr{P}(n)$: $1 + 2 + 3 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$ l'égalité à démontrer.
- Initialisation :

$\begin{cases} \text{Pour } n = 0 \text{, la somme est réduite à } 1 \\ (0 + 1)^2 = 1 \end{cases}$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: $1 + 2 + 3 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$ pour un certain n quelconque dans $\mathbb{N}$.
Montrons $\mathscr{P}(n + 1)$: $1 + 2 + 3 + \ldots + (2n + 1) + (2(n + 1) + 1) = [(n + 1) + 1]^2$
$= (n + 2)^2$.

Alors :

Méthode A :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + (2n + 1) + (2(n + 1) + 1) &= (n + 1)^2 + (2n + 3) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n + 2)^2 \end{aligned}$$

La méthode B ne présente pas d'intérêt.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

---

⑲ **a.** $u_1 = \dfrac{2 + 2}{2\times2 + 1} = \dfrac{4}{5}$

$u_2 = \dfrac{\frac{4}{5} + 2}{2\times\frac{4}{5} + 1} = \dfrac{14}{13}$

$u_3 = \dfrac{\frac{14}{13} + 2}{2\times\frac{14}{13} + 1} = \dfrac{40}{41}$

$u_4 = \dfrac{\frac{40}{41} + 2}{2\times\frac{40}{41} + 1} = \dfrac{122}{121}$ → Quelle jolie suite ! u_5 vaut $\dfrac{364}{365}$ et u_6 vaut $\dfrac{1\,094}{1\,093}$ ...

b. $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$ positif comme $(-1)^0 = 1$

$u_1 - 1 = \dfrac{4}{5} - 1 = -\dfrac{1}{5}$ négatif comme $(-1)^1 = -1$

$u_2 - 1 = \dfrac{14}{13} - 1 = \dfrac{1}{13}$ positif comme $(-1)^2 = 1$

$u_3 - 1 = \dfrac{40}{41} - 1 = -\dfrac{1}{41}$ négatif comme $(-1)^3 = -1$

$u_4 - 1 = \dfrac{122}{121} - 1 = \dfrac{1}{121}$ positif comme $(-1)^4 = 1$

c. Pour tout entier n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1 \\ &= \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{2u_n + 1} \\ &= \frac{u_n + 2 - 2u_n - 1}{2u_n + 1} = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1} \end{aligned}$$

d. On pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$ » , la proposition à démontrer.

- Initialisation :

On a démontré dans la question **b.** que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

Supposons $\mathscr{P}(n)$: « $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$ » pour un certain n quelconque.
Montrons $\mathscr{P}(n + 1)$: « $u_{n+1} - 1$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$ » .
Alors :

$u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$

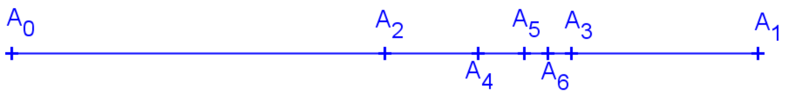
Par hypothèse de récurrence, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$,
donc $-u_n + 1$ a le même signe que $-(-1)^n$, c'est-à-dire que $(-1)^{n+1}$. → Puisque $-(-1)^n = (-1)\times(-1)^n$.

De plus, on a admis que $u_n > 0$, donc $2u_n + 1 > 0$.
On en déduit que $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$ a le même signe que $(-1)^{n+1}$.

- Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

⑳ **a.**



b. $a_2 = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$a_3 = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$

$a_4 = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2} = \dfrac{5}{8}$

$a_5 = \dfrac{\frac{3}{4}+\frac{5}{8}}{2} = \dfrac{11}{16}$

$a_6 = \dfrac{\frac{5}{8}+\frac{11}{16}}{2} = \dfrac{21}{32}$

c. A_{n+2} milieu de $[A_nA_{n+1}]$ donc $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$

d. On pose $\mathscr{P}(n)$: $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$, l'égalité à démontrer.

- Initialisation :

  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ -\frac{1}{2}a_0 + 1 = -\frac{1}{2} \times 0 + 1 = 1 \end{cases}$ donc $a_1 = -\dfrac{1}{2}a_0 + 1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :

  Supposons $\mathscr{P}(n)$: $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$ pour un certain n quelconque.

  Montrons $\mathscr{P}(n+1)$: $a_{n+2} = -\dfrac{1}{2}a_{n+1} + 1$.

  On va certainement utiliser $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

  Mais si on utilise l'hypothèse de récurrence en remplaçant a_{n+1} *par* $-\dfrac{1}{2}a_n + 1$ *, on se retrouve avec* a_{n+2} *en fonction de* a_n .

  Cela ne nous intéresse pas : on veut a_{n+2} *en fonction de* a_{n+1} ...

  Il faut donc commencer par transformer l'hypothèse de récurrence pour pouvoir remplacer a_n *en fonction de* a_{n+1} :

  On a : $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1 \Leftrightarrow a_{n+1} - 1 = -\dfrac{1}{2}a_n$

  $\Leftrightarrow a_n = -2\,(a_{n+1} - 1)$

  Alors :

  $$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{-2\,(a_{n+1} - 1) + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{-2a_{n+1} + 2 + a_{n+1}}{2} \\ &= \frac{2 - a_{n+1}}{2} = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 1 \end{aligned}$$

- Conclusion : Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .