Feuille d'exercices du chapitre 1

Exercices sur la démonstration par récurrence :

Exercice 1 *

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times 3^n + 1$.
2. Démontrer par récurrence que la somme des n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$, c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, soit $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2 *

Soit (u_n) la suite définie par $u_4 = 2$ et pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n = 3 \times 2^{n-4} - 1$.

Exercice 3 *

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 2$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
2. a. Justifier que $u_1 = -1$.
   b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} \leqslant u_n.$$
   c. Conclure quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

Exercice 4 *

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :
$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

1. Calculer u_1.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$
3. En déduire le sens de variation de (u_n).

Exercice 5 **

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = 4 + 5u_n.$$
Manon a réalisé la feuille de calcul ci-contre.

	A	B	C
1	n	u_n	u_n+1
2	0	0	1
3	1	4	5
4	2	24	25
5	3	124	125
6	4	624	625
7	5	3124	3125

a) Émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.
b) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 6 **

Démontrer les deux propositions suivantes :
1- Pour tout entier n , $4^n - 1$ est divisible par 3 .
2- Pour tout entier n, $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Exercice 7 ***

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, on doit quelquefois utiliser une récurrence double :

Initialisation : on vérifie que $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel $k \geqslant n_0$, $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies.
On démontre alors que $P(k+2)$ est vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -5$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$
On se propose de démontrer par récurrence double que pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: « $u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n$ » est vraie.

a) Vérifier que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
b) Supposer que pour un entier naturel k, $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies, et démontrer qu'alors $P(k+2)$ est vraie.
c) Conclure.