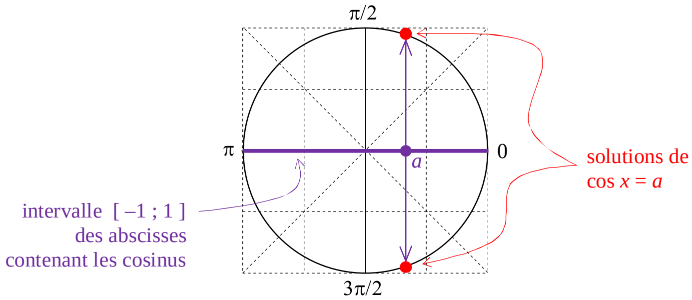
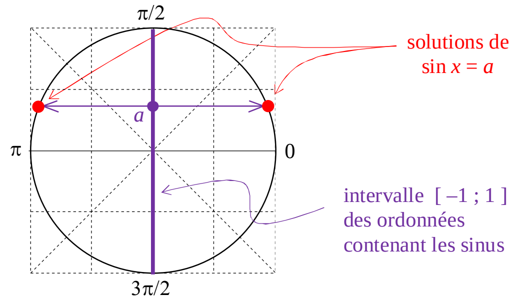
Savoir ÉTUDIER UNE FONCTION TRIGONOMÉTRIQUE

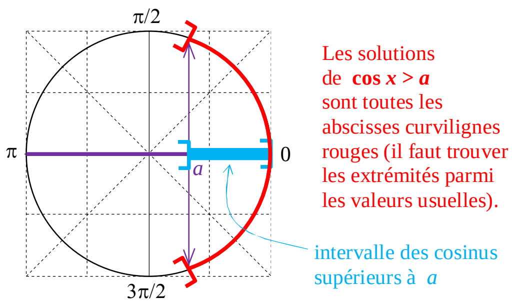
<u>Ce que je dois savoir faire</u>

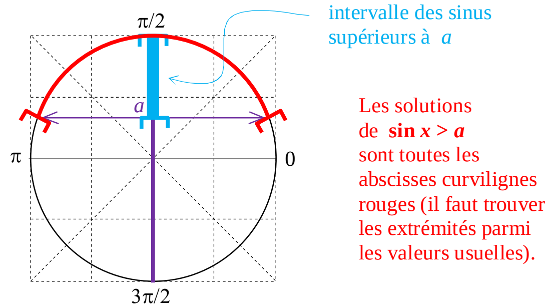
- **Démontrer qu'une fonction est périodique**
  - C'est souvent une période 2π :
    on montre que $f(x + 2\pi) = f(x)$ en se servant de la 2π-périodicité des fonctions $\cos$ et $\sin$.
  - Cela permet d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur 2π , puisque la courbe se répètera à l'identique. L'intervalle peut être restreint à $[\,0\,;\,2\pi\,]$, mais l'est souvent à $[\,-\pi\,;\,\pi\,]$ (voir ci-dessous).
  - Ça peut être une autre période.
- **Démontrer qu'une fonction est paire ou impaire**
  - On montre que $f(-x) = f(x)$ ou que $f(-x) = -f(x)$ en se servant de la parité de $\cos$ et de l'imparité de $\sin$.
  - Cela permet d'étudier la fonction sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$, puisque le courbe sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine.
  - Si on a déjà restreint l'étude à $[\,-\pi\,;\,\pi\,]$, on peut encore restreindre à $[\,0\,;\,\pi\,]$.
- **Calculer la dérivée**
  - Utiliser les opérations usuelles sur les dérivées.
  - Appliquer les nouvelles dérivées :
    - la dérivée de $\cos$ est $-\sin$,
    - la dérivée de $\sin$ est $\cos$,
    - la dérivée de la fonction composée $x \mapsto ax + b \mapsto \cos(ax + b)$ est $x \mapsto -a \sin(ax + b)$,
    - la dérivée de la fonction composée $x \mapsto ax + b \mapsto \sin(ax + b)$ est $x \mapsto a\cos(ax + b)$.
- **Résoudre une équation de la forme $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ dans un intervalle donné**
  - Utiliser le cercle trigonométrique.
    Les solutions sont en général des valeurs usuelles, multiples de $\frac{\pi}{6}$, de $\frac{\pi}{4}$, de $\frac{\pi}{3}$, de $\frac{\pi}{2}$ ou de π .





- **Résoudre une inéquation de la forme $\cos x < a$ ou $\sin x < a$ dans un intervalle donné**
  - Même principe, mais attention, sur le cercle trigonométrique, les plus petits ne sont pas à gauche et les plus grands ne sont pas à droite !





- **Établir le tableau de variations**
  - Pour établir les signes des facteurs trigonométriques, aidez-vous des équations et des inéquations résolues avec le cercle trigonométrique.

Remarques sur les exercices

- Les exercices **1.** à **3.** sont des études de fonctions.
- L'exercice **4.** est un Vrai-Faux pas facile...

---

1. On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x\,(1 - \cos x)$.

a) Justifier qu'on peut étudier cette fonction seulement sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.

b) Justifier que f est une fonction paire.
En déduire l'intervalle minimum sur lequel on peut étudier cette fonction.

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sin x\,(2\cos x - 1)$.

d) 1) Sur le cercle trigonométrique, représenter en rouge les solutions de l'équation $\sin x = 0$ situées dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
Puis, représenter en vert les solutions de l'inéquation $\sin x > 0$ situées dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

2) Sur le cercle trigonométrique, représenter en bleu les solutions de l'équation $2\cos x - 1 = 0$ situées dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
Attention, vous ne les trouverez pas sans avoir transformé cette équation en $\cos x = \dots$.
Puis, représenter en noir les solutions de l'inéquation $2\cos x - 1 > 0$ situées dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

3) Établir sur $[0\,;\,\pi]$ le tableau de variations de f .

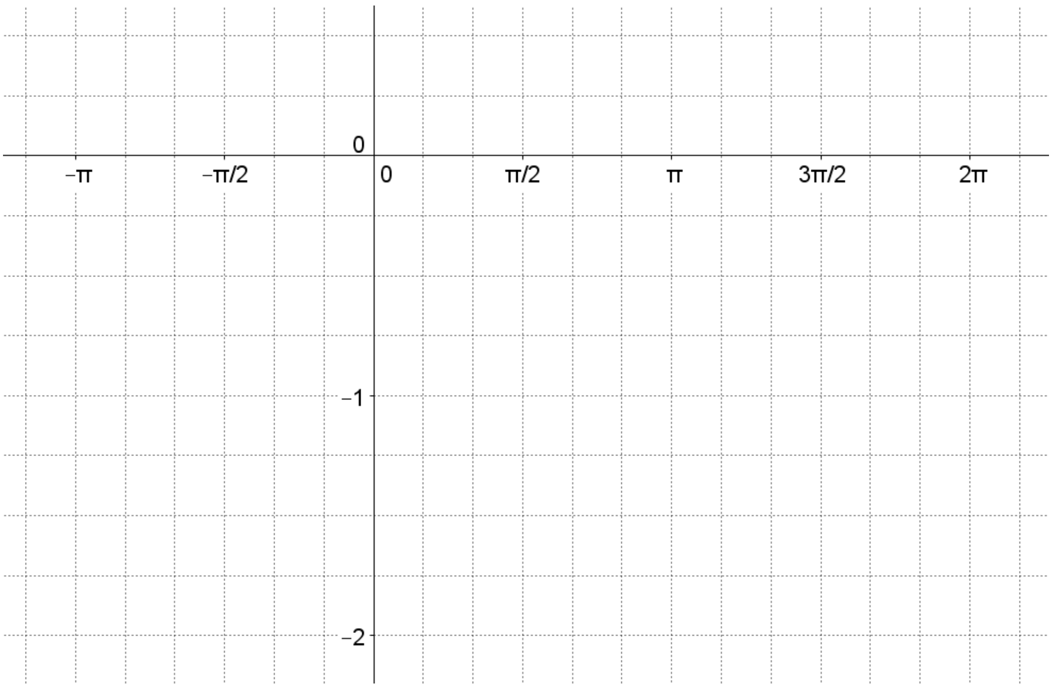
e) Sur le cercle trigonométrique, représenter en vert les solutions de l'équation $f(x) = 0$ situées dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

f) 1) Sur le graphique ci-dessous, placer les points de la courbe de f d'abscisses 0 , $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et π .

2) Tracer en vert les tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

3) Tracer en rouge la courbe de f sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

4) En déduire la courbe de f sur l'intervalle $[-\pi\,;\,0]$, puis sur $\mathbb{R}$.



2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 \sin x\,(1 + \cos x)$.

a) Étudier la périodicité et la parité de la fonction g et en déduire l'intervalle minimum sur lequel on peut étudier cette fonction.

b) Montrer que, pour tout x , $g'(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$.

c) En posant $X = \cos x$, montrer que, sur $[0 ; \pi]$, $g'(x)$ s'annule en $\dfrac{\pi}{3}$ et en π .

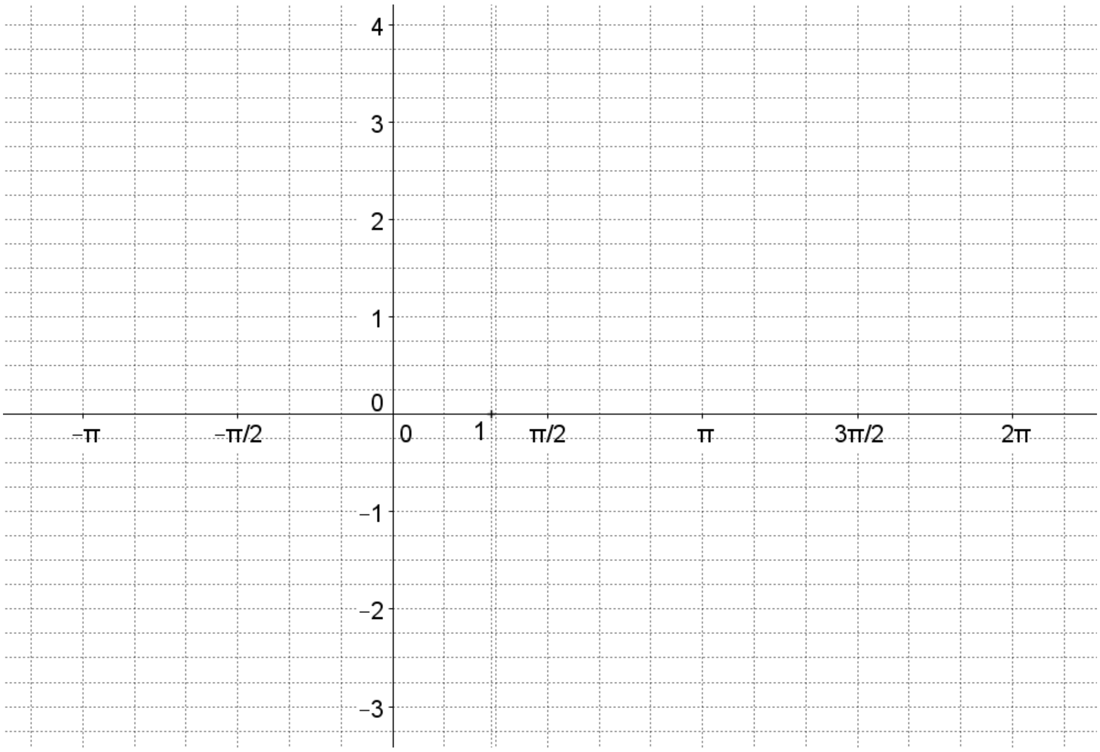
d) Montrer que, sur $[0 ; \pi]$, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [0 ; \dfrac{\pi}{3}[$.

En déduire le tableau de variations de g .

e) Calculer $g'(0)$.

f) Sur le graphique ci-dessous, tracer en vert les tangentes aux points d'abscisses 0 , $\dfrac{\pi}{3}$ et π .

Tracer en rouge la courbe de g sur $[0 ; \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.



Remarque : On a tracé la droite d'équation $x = 1$ pour permettre de tracer la tangente au point d'abscisse 0 avec précision.

---

3. On donne la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin(2x + \pi)$.

a) 1) On rappelle la formule, pour tous réels a et b :
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x + \pi) = -\sin(2x)$.

2) Montrer que h est une fonction impaire.

b) Montrer que h est une fonction π-périodique.
En déduire l'intervalle minimum sur lequel on peut étudier cette fonction.

c) Montrer que, pour tout x , $h'(x) = 2\cos(2x + \pi)$.

d) On pose $X = 2x + \pi$.

1) Lorsque $x \in [0 ; \dfrac{\pi}{2}]$, à quel intervalle appartient X ?

2) Montrer que, sur $[0 ; \dfrac{\pi}{2}]$, $h'(x)$ s'annule en $\dfrac{\pi}{4}$.

3) Montrer que, sur $[\, 0 \,;\, \frac{\pi}{2} \,]$, $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \,]\, \frac{\pi}{4} \,;\, \frac{\pi}{2} \,[$.

4) En déduire le tableau de variations de h .

e) Calculer $h'(0)$.

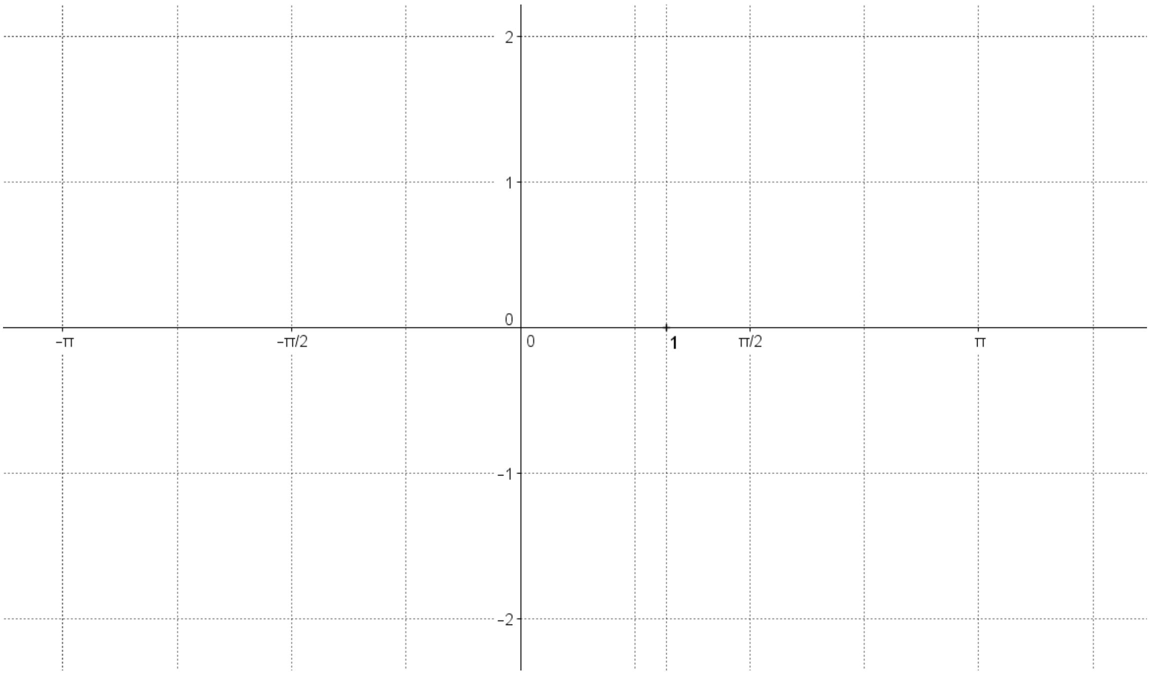
f) 1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(\frac{\pi}{4} - x) = h(\frac{\pi}{4} + x)$.

2) En déduire un axe de symétrie de la courbe.

g) Sur le graphique ci-dessous, tracer en bleu l'axe de symétrie obtenu à la question *f)* .

Tracer en vert les tangentes aux points d'abscisses 0, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Tracer en rouge la courbe de h sur $[\, 0 \,;\, \frac{\pi}{2} \,]$, puis sur $[\, -\frac{\pi}{2} \,;\, 0 \,]$, puis sur $\mathbb{R}$.



Remarque : On a tracé la droite d'équation $x = 1$ pour permettre de tracer la tangente au point d'abscisse 0 avec précision.

---

4. VRAI ou FAUX ?

Indiquer si la proposition est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite non constante de réels.
Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.

Proposition 1 : « On peut choisir la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$. »

D'après Baccalauréat Nouvelle Calédonie 2012