Correction de T^ale S - FONCTIONS - Fiche 2

1. ***a)*** Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi)\,(1 - \cos(x + 2\pi))$

$= \cos x\,(1 - \cos x)$ car la fonction cos est 2π-périodique → Ce qui permet de remplacer $\cos(x+2\pi)$ par $\cos x$.

$= f(x)$

donc f est 2π-périodique,
donc on peut l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi\,;\,\pi]$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f(-x) = \cos(-x)\,(1 - \cos(-x))$

$= \cos x\,(1 - \cos x)$ car la fonction cos est paire → Ce qui permet de remplacer $\cos(-x)$ par $\cos x$.

$= f(x)$

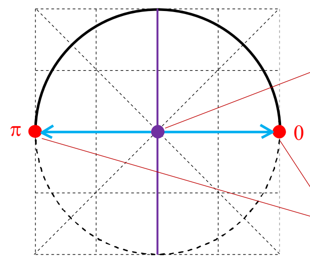
donc f est paire,
donc on peut l'étudier sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

c) f est de la forme uv avec $\begin{cases} u : x \mapsto \cos x \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = -\sin x \\ v : x \mapsto 1 - \cos x \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } v'(x) = \sin x\,. \end{cases}$

Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

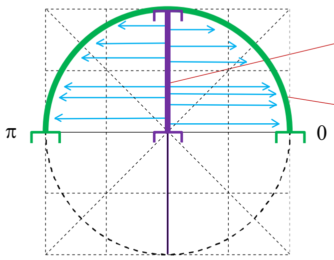
$f'(x) = -\sin x\,(1 - \cos x) + \cos x \sin x$
$= -\sin x + \sin x \cos x + \cos x \sin x$
$= -\sin x + 2 \sin x \cos x$
$= \sin x\,(2\cos x - 1)$

d) 1) Les sinus vivent sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ de l'axe des ordonnées.
Les x sont dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ du cercle trigonométrique, en noir.



parmi les sin x , un seul est nul

deux x du demi-cercle lui correspondent

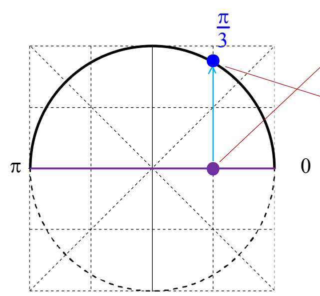


parmi les sin x , tous ceux qui sont > 0 forment cet intervalle

tous les x du demi-cercle qui correspondent forment le demi-cercle $]0\,;\,\pi[$ vert

2) Les cosinus vivent sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ de l'axe des abscisses.
Les x sont dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ du cercle trigonométrique, en noir.

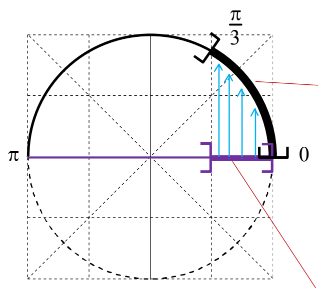
$2\cos x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2\cos x = 1$
$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$



parmi les cos x , un seul vaut $\frac{1}{2}$

un seul x du demi-cercle lui correspond

$2\cos x - 1 > 0$
$\Leftrightarrow 2\cos x > 1$
$\Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2}$



tous les x du demi-cercle qui correspondent forment l'arc de cercle $[0\,;\,\frac{\pi}{3}[$ noir

parmi les cos x , tous ceux qui sont $> \frac{1}{2}$ forment cet intervalle

3)

x	0		$\pi/3$		π
signes de $\sin x$	0	$+$		$+$	0
signes de $1-\cos x$		$+$	0	$-$	
signes de $f\,'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
variations de f	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	-2

$f(0) = \cos 0\ (\ 1 - \cos 0\ ) = 1\times 0 = 0$

$f(\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3}(\ 1 - \cos\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}(\ 1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$f(\pi) = \cos \pi\ (\ 1 - \cos \pi\ ) = -1\times 2 = -2$

e)

$f(x) = 0$

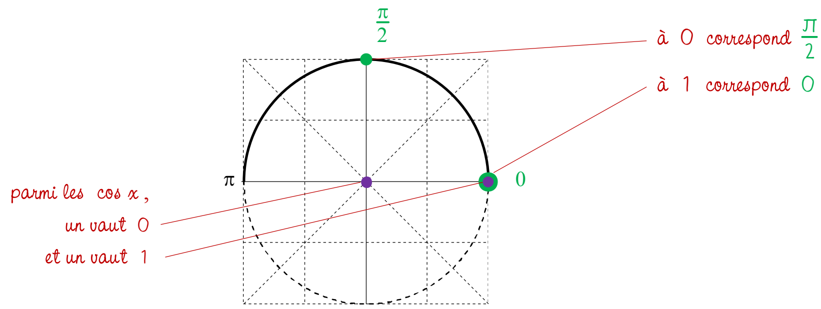
$\Leftrightarrow\ \cos x\ (\ 1 - \cos x\ ) = 0$

$\Leftrightarrow\ \cos x = 0\ $ ou $\ 1 - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow\ \cos x = 0\ $ ou $\ \cos x = 1$

$\Leftrightarrow\ x = 0\ $ ou $\ x = \frac{\pi}{2}$

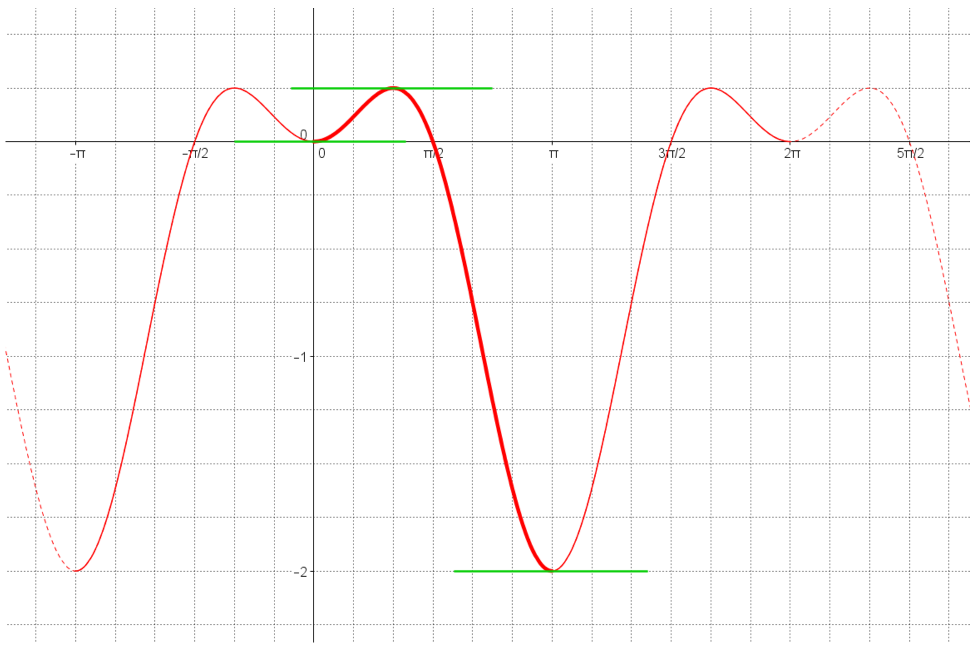
Les solutions sont 0 et $\frac{\pi}{2}$.



f)

f étant paire, la courbe admet une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
On en déduit le tracé de la courbe sur $[\,-\pi\,;0\,]$.

f étant 2π-périodique, la portion de courbe tracée sur $[\,-\pi\,;0\,]$ est identique à la portion de courbe sur $[\,\pi\,;2\pi\,]$.
On en déduit le tracé de la courbe sur $[\,\pi\,;2\pi\,]$.



2. ***a)***

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$g(\,x + 2\pi\,) = 2\sin(\,x + 2\pi\,)\,(\,1 + \cos(\,x + 2\pi\,)\,)$
$= 2\sin x\,(\,1 + \cos x\,)$ car les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π-périodiques
$= g(x)$

donc g est 2π-périodique,
donc on peut l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[\,-\pi\,;\pi\,]$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$g(-x) = 2\sin(-x)\,(\,1 + \cos(-x)\,)$
$= -\,2\sin x\,(\,1 + \cos x\,)$ car la fonction $\cos$ est paire et la fonction $\sin$ est impaire
$= -\,g(x)$

donc g est impaire,
donc on peut l'étudier sur l'intervalle $[\,0\,;\pi\,]$.

b) g est de la forme uv avec $\begin{cases} u : x \mapsto 2\sin x \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = 2\cos x \\ v : x \mapsto 1 + \cos x \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } v'(x) = -\sin x\,. \end{cases}$

Donc, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g\,' = u'v + uv'$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

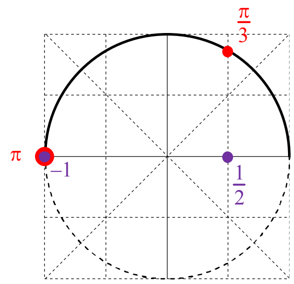
$g'(x) = 2\cos x\,(\,1 + \cos x\,) + 2\sin x\,(\,-\sin x\,)$
$= 2\cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$
$= 2\cos x + 2\cos^2 x - 2\,(\,1 - \cos^2 x\,)$ car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$= 2\cos x + 2\cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x$
$= 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$

c) Si on pose $X = \cos x$, on a :

$g'(x) = 0$
$\Leftrightarrow\ 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow\ 4X^2 + 2X - 2 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4\times4\times(-2) = 36 > 0$

donc il y a deux solutions $\dfrac{-2+\sqrt{36}}{2\times4} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-2-\sqrt{36}}{2\times4} = -1$.



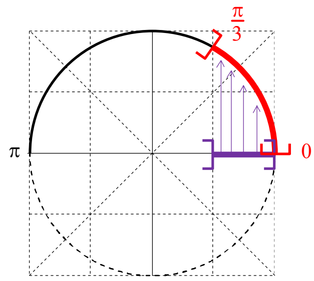
On en déduit :

$g'(x) = 0$
$\Leftrightarrow\ X = \dfrac{1}{2}$ ou $X = -1$
$\Leftrightarrow\ \cos x = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos x = -1$
$\Leftrightarrow\ x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \pi$ car on est sur $[\,0\,;\,\pi\,]$.

d) Si on pose $X = \cos x$, on a :

$g'(x) > 0$
$\Leftrightarrow\ 4X^2 + 2X - 2 > 0$

Or, $4X^2 + 2X - 2$ est du signe de son coefficient dominant 4 positif à l'extérieur de ses racines,
donc lorsque $X \in \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
Mais $X = \cos x$ est dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
On en déduit que :



$g'(x) > 0$
$\Leftrightarrow\ \cos x \in \left]\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$
$\Leftrightarrow\ x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right[$.

x	0		$\pi/3$		π
signes de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0
variations de g	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/2$	$\searrow$	0

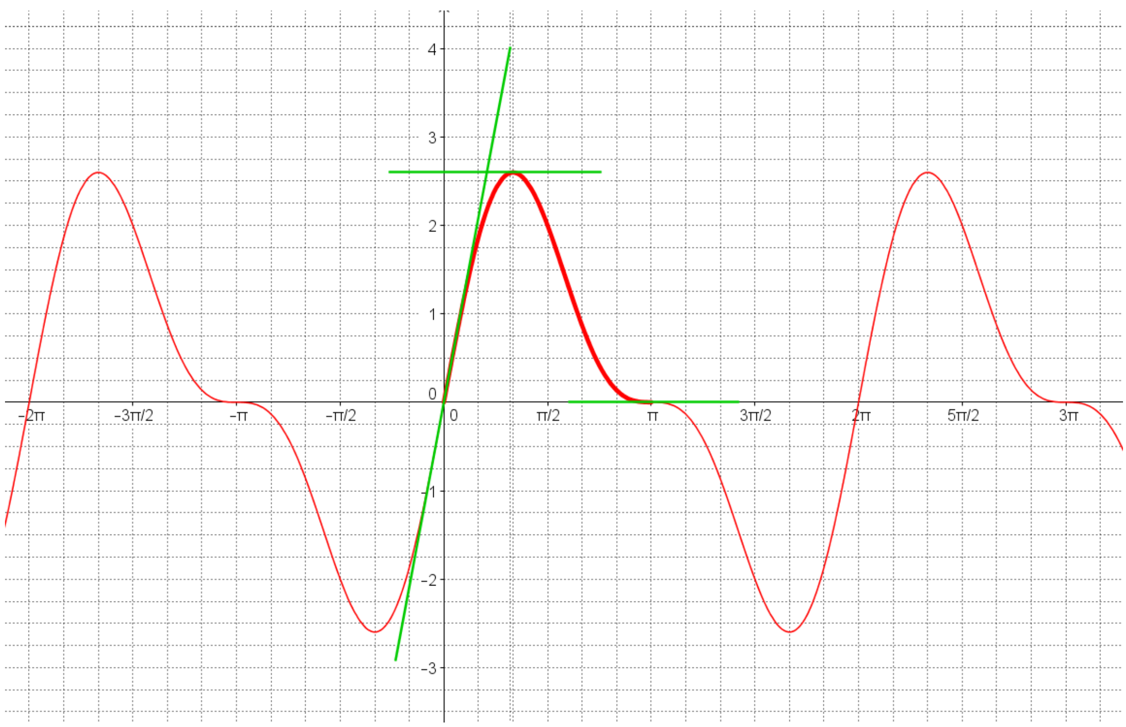
$g(0) = 2\sin 0\,(1+\cos 0) = 2\times0\times1 = 0$

$g(\frac{\pi}{3}) = 2\sin\frac{\pi}{3}\,(1+\cos\frac{\pi}{3}) = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,(1+\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$g(\pi) = 2\sin\pi\,(1+\cos\pi) = 2\times0\times0 = 0$

e) $g'(0) = 4\,(\cos 0)^2 + 2\cos 0 - 2$
$= 4 + 2 - 2 = 4$

f)



4. Posons (a_n) une suite qui converge vers $\frac{\pi}{4}$.

Par exemple définie par $a_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors :

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$; $\lim\limits_{X \to \pi/4} \sin(X) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc, par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin(a_n) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc, la proposition est vraie.