DENOMBREMENTS, COMBINATOIRE
CORRECTION

Produit cartésien (ou « principe multiplicatif »)
Exercice n°1
Notons E l'ensemble des trois entrées disponibles, $E=\{E_1;E_2;E_3\}$. Ainsi $Card(E)=3$

Notons P l'ensemble des deux plats disponibles, $P=\{P_1;P_2\}$. Ainsi $Card(P)=2$

Notons D l'ensemble des quatre desserts disponibles, $D=\{D_1;D_2;D_3;D_4\}$. Ainsi $Card(D)=4$

Un menu est constitué d'un triplet ordonné de trois éléments choisis respectivement dans E, P et D (on note $\{(x;y;z), x\in E, y\in P, z\in D\}$ ou encore $\{(x;y;z)\in E\times P\times D\}$

On effectue donc le produit cartésien de ces trois ensemble.

Le nombre de menus que l'on peut composer est donc égal à $Card(E)\times Card(P)\times Card(D)=3\times 2\times 4=24$

On peut donc composer 24 menus différents.

Exercice n°2
Cette femme peut s'habiller de $4\times 5\times 3=60$ façons

Exercice n°3
Une poignée de main est un couple (une 2-liste) constitué d'un premier élément choisi dans l'ensemble constitué des 12 joueurs de la première équipe, et d'un deuxième élément choisi dans l'ensemble constitué des 15 joueurs de la deuxième équipe. Il y a donc $12\times 15=180$ poignées de main

p-listes
Exercice n°4
Une réponse à ce QCM peut être désignée par une 15-liste de 15 chiffres choisis dans l'ensemble $\Omega=\{1;2;3;4\}$.

Le nombre de ces 15-listes est donc de cardinal $(Card(\Omega))^{15}=4^{15}$

Exercice n°5
Un poème est une 14-liste de 14 nombres choisis parmi 10 (le premier nombre désignant le numéro de page où est selectionné le premier vers, et ainsi de suite). Il y a donc 10^{14} poèmes possibles

Exercice n°6
En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères.
Un bit (*binary digit* : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

Un octet est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble $\Omega=\{0;1\}$.

L'ensemble de ces 8-listes est donc de cardinal $(Card(\Omega))^{8}=2^8=256$

Avec un octet, on peut donc coder jusqu'à 256 caractères.

Exercice n°7
Un numéro de téléphone à 8 chiffres est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble $\Omega=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

L'ensemble de ces 8-listes est donc de cardinal $(Card(\Omega))^{8}=10^8$

On peut ainsi former 10^8 numéros de téléphone à 8 chiffres

Un numéro de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 est une 8-liste d'éléments choisis dans l'ensemble $\Omega'=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

L'ensemble de ces 10-listes est donc de cardinal $(Card(\Omega'))^{8}=9^8=43046721$

On peut ainsi former 43046721 numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0

Arrangements

Exercice n°8

Un tel podium est un arrangement de 3 athlètes choisis parmi l'ensemble des 18 athlètes (l'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant remporter deux médailles simultanément).

Il existe donc $A_{18}^{3}=\frac{18!}{(18-3)!}=\frac{18!}{15!}=18\times17\times16=4896$ podiums différents

Exercice n°9

Le fait d'attribuer un rôle à chaque élève de terminale induit un ordre dans le choix des trois élèves.
En effet, le choix (Pierre, Paul, Jacques) est différent de (Paul, Pierre, Jacques), car dans le premier cas, c'est Pierre qui est président, alors que c'est Paul dans le deuxième cas)
Un bureau est donc un arrangement de 3 élèves choisis parmi l'ensemble des 24 élèves.

Il existe donc $A_{24}^{3}=\frac{24!}{(24-3)!}=\frac{24!}{21!}=24\times23\times22=12144$ bureaux différents

Exercice n°10

1) Un tel choix est donné par un 6-uplet (sextuplé) de 6 chiffres, chacun choisi entre 1 et 6. Pour connaître le nombre de choix, on effectue le produit cartésien de l'ensemble $\{1;2;3;4;5;6\}$ six fois par lui-même. Il y donc $6^6=46656$ choix possibles.

2) Si les six chiffres doivent être distincs, un tel choix sera donné par un arrangement de 6 chiffres choisis parmi 6, c'est-à-dire une permutation des 6 chiffres. Il aura donc 6 !=720 choix possibles

Exercice n°11

1) Les éléments de A sont tous les nombres de 1000 à 9999. Il y en a donc 9000. Ainsi $Card(A)=9000$

2) a) Un nombre de A est un élément du produit cartésien :

- d'un élément de $\Omega_1=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ en guise de premier chiffre. Il y a 9 possibilités.

- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 9 seulement (aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi). On doit donc choisir un arrangement de trois éléments pris dans un ensemble de 9 chiffres. Il y a $A_9^3=\frac{9!}{(9-3)!}=\frac{9!}{6!}=9\times8\times7=504$ tels arrangements.

Le nombre d'éléments de A composés de quatre chiffres distincts vaut donc $9\times504=4536$

b) Le contraire de « au moins deux chiffres identiques » est « quatre chiffres distincts »
Le nombre d'éléments de A possédant « au moins deux chiffres identiques » est égal au nombre total d'éléments de A diminué du nombre d'éléments de A possédant leurs quatre chiffres distincts, nombre qui a été calculé dans la question précédente. Le nombre d'éléments de A possédant « au moins deux chiffres identiques » vaut donc 9000-4536=4464

c) Un nombre de A composé de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 est un élément du produit cartésien :

- d'un élément de $\Omega_2=\{1;2;3;4;6;8;9\}$ en guise de premier chiffre. Il y a 7 possibilités.

- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 7 seulement (aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi, ni égal à 5 ou 7). On doit donc choisir un arrangement de trois éléments pris dans un ensemble de 7 chiffres. Il y a $A_7^3=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=7\times6\times5=210$ tels arrangements.

Le nombre d'éléments de A composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 vaut donc $7\times210=1470$

Exercice n°12

1) Un code est un élément du produit cartésien entre un élément de l'ensemble {A ;B ;C}, de cardinal 3, et de l'ensemble des 3-listes d'éléments de {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}, de cardinal $6^3=216$

Il y a donc $3\times6^3=3\times216=648$ codes possibles.

2) Si le code ne doit pas contenir de chiffre 1, alors les 3-listes sont constituées d'éléments de {2 ;3 ;4 ;5 ;6}. Il y en a donc $5^3=125$, et le nombre de codes vaut alors $3\times5^3=3\times125=375$

3) Le contraire de « le code contient au moins une fois le chiffre 1 » est « le code ne contient aucun chiffre 1 »
Le nombre de codes contenant au moins une fois le chiffre 1 est donc égal au nombre total de codes diminué du nombre de codes ne contenant pas le chiffre 1. Ces deux nombres ayant été calculés dans les deux questions précédentes, on conclut que le nombre de codes contenant au moins une fois le chiffre 1 est égal à 648-375=273

4) un code comportant des chiffres distincts sera un élément du produit cartésien entre un élément de l'ensemble {A ;B ;C}, de cardinal 3, et de l'ensemble des arrangements de 3 éléments pris parmi {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}. Ces arrangements sont au nombre de $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 6\times5\times4 = 120$. Il y a donc $3\times A_6^3 = 3\times120 = 360$ codes possibles.

5) Le contraire de « le code contient au moins deux chiffres identiques» étant « le code ne contient que des chiffres distincts », le nombre de codes contenant au moins deux chiffres identiques est égal au nombre total de codes diminué du nombre de codes ne contenant que des chiffres distincts, soit 648-360=288 codes possibles.

Permutations et anagrammes

Exercice n°13

Une liste de passage des 24 élèves est une permutation des 24 éléments de l'ensemble classe.

Il y a donc $24! \approx 6,2\times10^{23}$ listes possibles.

Exercice n°14

L'ordre dans lequel on énonce le triplet solution est important. En effet si on énonce *S*={(5 ;-1 ;3)}, cela signifie que $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$, tandis que si l'on énonce *S*={(5 ;3 ;-1)}, cela signifie que $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases}$.

Les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système sont donc constitués de toutes les permutations de ces trois nombres, à savoir $\boxed{S=\{(5 ;-1 ;3) ; (5 ;3 ;-1) ; (-1 ;5 ;3) ; (-1 ;3 ;5) ; (3 ;5 ;-1) ; (3 ;-1 ;5)\}}$

Exercice n°15

Le mot « MATH » étant vu comme une liste ordonnée des 4 lettre (M,A,T,H), un anagramme du mot « MATH » est une permutation de ces quatre lettres. Il y en a donc $4! = 4\times3\times2\times1 = 24$. $\boxed{\text{Il y a 24 anagrammes du mot MATH}}$

Exercice n°16

1) Il y a 7 !=5040 anagrammes du mot PATRICE

2) a) Pour constituer un mot commençant et finissant par une consonne, il faut d'abord choisir les deux consonnes parmi les quatre que contient ce mot. L'ordre est important car un mot commençant par P et finissant par T n'est pas identique à un mot commençant par T et finissant par P. Il y a donc $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4\times3 = 12$ choix possibles. Une fois ce choix effectué, il reste 5 !=120 façons de permuter les 5 autres lettres. Il aura donc $A_4^2\times5! = 12\times120 = 1440$ anagrammes du mot PATRICE commençant et finissant par une consonne.

b) Suivant le même raisonnement, il aura $A_3^2\times5! = 720$ anagrammes du mot PATRICE commençant et finissant par une voyelle.

c) Pour constituer un mot commençant par une consonne et finissant par une voyelle, il faut d'abord choisir le couple (consonne,voyelle), qui est un élément du produit cartésien entre l'ensemble des consonnes et l'ensemble des voyelles.

Il y aura donc $4\times3 = 12$ tels choix

Une fois ce choix effectué, il y aura 5 !=120 façons de permuter les 5 autres lettres.

Il aura donc $4\times3\times5! = 12\times120 = 1440$ anagrammes du mot PATRICE commençant par une consonne et finissant par une voyelle.

d) La consonne et la voyelle figurant à l'extrémité du mot jouant des rôles parfaitement symétriques, il y aura $3\times4\times5! = 12\times120 = 1440$ anagrammes du mot PATRICE commençant par une voyelle et finissant par une consonne

Exercice n°17

Une anagramme du mot TABLEAU est une permutation des 7 lettres de ce mot. Il y en a donc, a priori, 7 !

Mais si au sein de ces anagrammes, on « permute » les deux lettres A, on retombe sur le même mot.

Autrement dit, au sein des 7 ! anagrammes, sont comptées deux fois les mots où se permutent les deux lettres A

Pour éviter de compter ces anagrammes deux fois, on doit diviser 7 ! par le nombre de permutations possibles des deux lettres A, soit 2 !=2

Le nombre d'anagrammes différentes du mot TABLEAU est donc égal à $\boxed{\frac{7!}{2!} = \frac{7!}{2} = 2520}$

De manière générale :

Exercice n°18

1) Une anagramme d'un mot de *n* lettres est une permutation des *n* éléments de ce mot. Il y en a donc, a priori *n* !

Mais si un groupe de lettres se répète p_1 fois au sein de ce mot, alors les permutations de ces p_1 lettres, qui sont au nombre de $p_1!$ ne changent pas le mot, de sorte que l'on a compté, dans les *n* ! anagrammes, $p_1!$ fois trop d'anagrammes. Il faut donc diviser *n* ! par $p_1!$ pour ne pas compter trop d'anagrammes.

On procède de même avec le deuxième groupe de mots se répétant p_2 fois. Et ainsi de suite

Le nombre d'anagrammes de mots de *n* lettres comportant *k* groupes lettres se répétant $p_1, p_2, ... p_k$ fois est donc égal à $\boxed{\dfrac{n!}{p_1!p_2!...p_k!}}$

2) Dans le mot ANAGRAMME figurent :

- un groupe de trois lettres A se répétant - - un groupe de 2 lettres M se répétant

Le nombre d'anagrammes du mot ANAGRAMME vaut donc $\boxed{\dfrac{9!}{3!2!} = 30240}$

Exercice n°19

1) Si on tient compte de l'accent, les six lettres du mot PRISÉE sont donc toutes différentes.

Le nombre d'anagrammes du mot PRISÉE est donc égal à 6 !=720

2) Si on ne tient pas compte de l'accent, le mot PRISEE contient donc 6 lettres, dont 2 identiques.

Il engendrera donc $\boxed{\dfrac{6!}{2!} = \dfrac{6!}{2} = 360}$ anagrammes.

Combinaisons

Exercice n°20

L'ordre dans lequel on choisit les 3 élèves n'a, ici, pas d'importance.

En effet, que l'on ait choisi « dans cet ordre » (Pierre, Paul, Jacques) ou (Paul, Pierre, Jacques), c'est l'ensemble constitué de ces trois élèves qui devra aller chercher les livres au CDI. Ces deux « choix » sont donc identiques.

La désignation de ces trois élèves correspond donc à un choix simultané (sans ordre, sans répétition possible) de 3 élèves parmi 24. Il y a donc $\binom{24}{3} = \dfrac{24!}{(24-3)!3!} = \dfrac{24 \times 23 \times 22}{3 \times 2 \times 1} = 2024$ choix différents.

Exercice n°21

Une rencontre est déterminée par le choix de deux équipes parmi 8

Comme il n'y a qu'un match entre deux équipes (pas d'aller-retour), le choix (équipe A, équipe B) est identique au choix (équipe B, équipe A). Il y a donc $\binom{8}{2} = \dfrac{8!}{(8-2)!2!} = 28$ rencontres possibles

Exercice n°22

Un tirage correspondant au choix simultané (sans ordre, sans répétition possible) de 6 boules parmi 49, il y a $\binom{49}{6} = \dfrac{49!}{(49-6)!6!} = \dfrac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ combinaisons différentes.

Exercice n°23

Un choix de 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes est un élément du produit cartésien entre :

- l'ensemble des choix simultanés de 3 hommes parmi 10, de cardinal $\binom{10}{3} = 120$

- l'ensemble des choix simultanés de 2 femmes parmi 5, de cardinal $\binom{5}{2} = 10$

L'ensemble des choix de 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes vaut donc $\boxed{\binom{10}{3} \times \binom{5}{2} = 120 \times 10 = 1200}$

Exercice n°24

Les délégués sont choisis sans ordre

1) Les choix simultanés de 2 délégués parmi les 32 élèves sont au nombre de $\overline{\binom{32}{2}=496}$

2) Si on impose d'avoir un garçon et une fille, alors le choix des deux délégués est un élément du produit cartésien entre :

- l'ensemble des choix simultanés de 1 délégué parmi les 19 garçons, soit $\binom{19}{1}=19$ choix

- l'ensemble des choix simultanés de 1 délégué parmi les 13 filles, soit $\binom{13}{1}=13$ choix

L'ensemble des choix est donc de cardinal $\binom{19}{1}\times\binom{13}{1}=19\times13=247$

3) Si on impose d'avoir 2 garçons comme délégués, le nombre de choix des deux délégués est donc « réduit » au nombre de choix de 2 délégués parmi les 19 garçons, au nombre de $\binom{19}{2}=171$

Exercice n°25

1) Le nombre de choix de 5 personnes parmi les 18 est égal à $\binom{18}{5}=8568$

2) Le nombre de groupes dans lequel figure Christian est égal (une fois lui choisi) au nombre de groupes de 4 personnes choisies parmi 17, soit $\binom{17}{4}=2380$

3) Afin que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble, il faut :

- constituer un groupe de 5 personnes contenant Christian mais pas Claude. Le nombre de groupes dans lequel figure Christian mais pas Claude est égal (une fois lui choisi) au nombre de groupes de 4 personnes choisies parmi 16 (pour ne pas qu'y figure Claude), soit $\binom{16}{4}=1820$

OU

- constituer un groupe de 5 personnes contenant Claude mais pas Christian.De façon analogue à ce qui précède (Christian et Claude jouent des rôles similaires), il y a $\binom{16}{4}=1820$ possibilités

Il y a donc $\binom{16}{4}+\binom{16}{4}=3640$ répondant à cette condition

Exercice n°26

1) Le nombre de d'échantillons diférents est égal au nombre de choix de 4 personnes parmi les 30, soit $\binom{30}{4}=27405$

2) Le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataires est égal au nombre de choix de 4 personnes parmi les 30-12=18 non célibataires, soit $\binom{18}{4}=3060$

3) Le contraire de « au moins un célibataire » est « aucun célibataire ».

Le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est égal au nombre total d'échantillons diminué du nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire. Ces deux nombres ayant été déterminés dans les deux questions rpécédentes, on conclut que le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est égal à $\binom{30}{4}-\binom{18}{4}=27405-3060=24345$

Exercice n°27

1) Le nombre de choix de 6 personnes parmi les 25+32=57 est égal à $\binom{57}{6}=36288252$

2) a) Le nombre de groupes constitués uniquement d'hommes s'apparente au nombre de choix de 6 hommes parmi 32, soit à $\binom{32}{6}=906192$ groupes

b) Le nombre de groupes de 6 personnes de même sexe est égal au nombre de groupes constitués uniquement d'hommes (déterminé précédemment) augmenté du nombre de groupes constitués uniquement de femmes, que l'on évalue de manière identique à ce qui précède à $\binom{25}{6}$ groupes

Le nombre de groupes constitué de personnes de même sexe est donc égal à $\binom{32}{6}+\binom{25}{6}=1083292$ groupes.

c) Le contraire de « au moins une femme et au moins un homme » est « uniquement des femmes ou uniquement des hommes », c'est à dire « »un groupe unisexe ». Le nombre de groupes constitués d'au moins une femme et d'au moins un homme est donc égal au nombre total de groupes, $\binom{57}{6}=36288252$, diminué du nombre de groupes constitués de personnes du même sexe, calculé ci-dessus, $\binom{32}{6}+\binom{25}{6}=1083292$. Le nombre de groupes constitués d'au moins une femme et d'au moins un homme est donc égal à 36288252-1083292=35204960

Exercice n°28

1) Le nombre de choix simultané de 5 cartes parmi 32 est égal à $\binom{32}{5}=\frac{32!}{(32-5)!5!}=201376$

2) a) Pour constituer une main contenant un carré, il faut choisir le carré (8 possibilités) et compléter la main par une 5$^{\text{ème}}$ carte choisie parmi 28. Il y a donc $8\times\binom{28}{1}=224$ mains différentes contenant un carré

b) Pour constituer une main contenant deux paires distinctes, il faut choisir les deux hauteurs distinctes des deux paires (il y a $\binom{8}{2}=\frac{8\times 7}{2}=28$ combinaisons), choisir deux fois deux cartes parmi les quatre de chaque hauteur, et enfin compléter la main par une cinquième carte choisie parmi 24 (pour n'avoir que deux paires et pas risquer d'obtenir un brelan donc un full). Il y a donc $\binom{8}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{24}{1}=24192$ mains répondant à ce critère

c) Pour constituer une main contenant un full, il faut choisir les deux hauteurs distinctes correspondant au brelan et à la paire, mais en tenant compte de l'ordre (2 As 3 Rois n'est pas identique à 2 Rois 3 As), soit $A_8^2=28$ couples de hauteurs possibles), choisir 2 cartes parmi 4 pour constituer la paire, et 3 cartes parmi 4 pour constituer le brelan

Il y a donc $A_8^2\times\binom{4}{2}\times\binom{4}{3}=1344$ mains répondant à ce critère

d) Pour constituer une main contenant un brelan (sans full ni carré), il faut choisir une hauteur pour le brelan, choisir les 3 cartes parmi 4 pour constituer ce brelan, et compléter la main par 2 cartes parmi 28. Mais on s'expose alors à la possibilité d'obtenir, grâce à ces deux cartes supplémentaires, une autre paire, ce qui constuerait un full
On devra donc soustraire le nombre de mains obtenus dans la question 2c)

Il y aura donc $8\times\binom{4}{3}\times\binom{28}{2}-1344=10752$ mains répondant à ce critère

e) Pour constituer une main de 5 cartes de même couleur, se suivant dans l'ordre croissant, il faut choisir parmi les 4 possibilités de couleur, les 4 possibilités de suite croissante : (7,8,9,10,V) , (8,9,10,V,D) , (9,10,V,D,R) ou (10,V,D,R,As)
Il y aura donc $4\times 4=16$ mains répondant à ce critère.

Combinaisons et arrangements

Exercice n°29

1) Tirages successifs sans remise de 3 jetons parmi 9. Il y a $A_9^3 = 504$ possibilités

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ». On a $p(A) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5}{42}$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $p(B) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{1}{21}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »

1ère méthode : $p(C) = p(A) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$

2ème méthode

$$p(C) = \frac{\overbrace{A_4^3}^{\text{Ne tirer aucun vert}} + \overbrace{3 \times A_5^1 \times A_4^2}^{\substack{\text{Tirer exactement 1 vert :} \\ \text{- choix de la place du jeton vert} \\ \text{- choix d'1 vert et de 2 rouges}}} + \overbrace{3 \times A_5^2 \times A_4^1}^{\text{Tirer exactement 2 verts}}}{A_9^3} = \frac{37}{42}$$

d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ». $p(D) = \frac{3 \times A_5^2 \times A_4^1}{A_9^3} = \boxed{\frac{5}{14}}$

2) Tirages simultanés de 3 jetons parmi 9. Il y a $C_9^3 = 84$ possibilités

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ». On a $p(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $p(B) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »

1ère méthode : $p(C) = p(A) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$

2ème méthode

$$p(C) = \frac{\overbrace{C_4^3}^{\text{Ne tirer aucun vert}} + \overbrace{C_5^1 \times C_4^2}^{\substack{\text{Tirer exactement 1 vert :} \\ \text{- choix de la place du jeton vert} \\ \text{- choix d'1 vert et de 2 rouges}}} + \overbrace{C_5^2 \times C_4^1}^{\text{Tirer exactement 2 verts}}}{C_9^3} = \frac{37}{42}$$

d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ». $p(D) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{C_9^3} = \frac{5}{14}$

Commentaire sur l'exercice :

Selon toute logique, on doit retrouver les mêmes résultats dans les deux parties. En effet, tirer successivement sans remise 3 boules ou les tirer simultanément revient au même. Que l'on traite un tirage comme un arrangement ou comme un sous-ensemble, les questions a) et b) nous fournissent le même résultat si on a conservé l'ordre jusqu'au bout (numérateurs et dénominateurs des fractions) le même mode de comptage. En ce qui concerne la question c), si on travaille avec des arrangements, on induit ainsi un ordre. Il ne faut donc pas oublier de multiplier par 3, c'est à dire de choisir d'abord une place pour le jeton vert. Ce problème ne se pose pas avec des combinaisons. Conclusion : Il est plus facile de travailler avec des combinaisons.

Cette dernière remarque est valable car le type d'événements étudié ne fait pas intervenir d'ordre.

Dénombrements divers

Exercice n°30

a) Supposons les 5 patères numérotées (de 1 à 5). Une disposition de trois manteaux sur le portemanteau est une 3-liste ordonnées (sans répétition) des 3 numéros de patères. En effet (2,3,5) signifiera que le premier manteau est accroché sur la patère 2 et ainsi de suite. Une disposition des trois manteaux est donc un arrangement de 3 chiffres parmi 5. Il y en a donc $\boxed{A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60}$

b) Si on doit disposer les cinq manteaux sur les cinq patères, une disposition sera donc donnée par toute permutation des cinq chiffres correspondant aux numéros de patères. Il a donc 5 !=120 dispositions différentes.

c) Il est impossible de disposer 6 manteaux sur 5 patères sans que deux ne se chevauchent. Il n'y a donc aucune disposition possible.

Exercice n°31

Désignons par $G=\{G_1;G_2;G_3;G_4\}$ l'ensemble des 4 garçons et $F=\{F_1;F_2\}$ l'ensemble des 2 filles.

1) L'ensemble des dispositions possibles de ces 6 personnes sur les six places d'un banc correspond à l'ensemble des permutations des six éléments de l'ensemble $F \cup G$. Il a donc 6 !=720 dispositions différentes.

2) Si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre, il y a deux « configurations possibles » :

4 garçons	2 filles

ou

2 filles	4 garçons

Au sein de chaque configuration, il y a 2 !=2 manières de permuter les 2 filles, et 4 !=24 manières de permuter les 4 garçons

Il y aura au total $2\times4!\times2!=96$ manières de placer ainsi ces six personnes

3) Si chaque fille est intercalée entre deux garçons, il y a trois configurations possibles :

G	F	G	F	G	G

ou

G	G	F	G	F	G

ou

G	F	G	G	F	G

Une fois la configuration « choisie », il y a 2 !=2 manières de permuter les 2 filles, et 4 !=24 manières de permuter les 4 garçons

Il y aura au total $3\times2!\times4!=144$ manières de placer ainsi ces six personnes

4) Si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre, il y a cinq configurations possibles :

F	F	G	G	G	G

ou

G	F	F	G	G	G

ou

G	G	F	F	G	G

ou

G	G	G	F	F	G

ou

G	G	G	G	F	F

Une fois la configuration « choisie », il y a 2 !=2 manières de permuter les 2 filles, et 4 !=24 manières de permuter les 4 garçons

Il y aura au total $5\times2\times4!=240$ manières de placer ainsi ces six personnes