Savoir ÉTUDIER DES SUITES D'INTÉGRALES

Je dois avoir compris qu'il y a deux sortes de suites d'intégrales

- Lorsque le rang n est dans les bornes, et la fonction est fixe (son expression ne dépend pas de n) :

  par exemple, $u_n = \int_0^n f(t)\,.\,\mathrm{d}t$.

- Lorsque le rang n est dans la fonction (son expression dépend de n), et les bornes sont fixes :

  par exemple, $v_n = \int_a^b f_n(t)\,.\,\mathrm{d}t$.

Ce que je dois savoir faire

- Montrer qu'une telle suite est convergente

  - Si f admet une primitive F, alors $u_n = [\,F(t)\,]_0^n = \underbrace{F(n) - F(0)}$

    si cette expression a une limite quand $n \to +\infty$,
    alors c'est aussi la limite de u_n.

  - Si chaque f_n admet une primitive F_n, alors $v_n = [\,F_n(t)\,]_a^b = \underbrace{F_n(b) - F_n(a)}$

    si cette expression a une limite quand $n \to +\infty$,
    alors c'est aussi la limite de v_n.

  Remarque : Il est rare de pouvoir aller si vite, les fonctions proposées n'ayant en général pas de primitive connue !

- **Montrer qu'une telle suite est croissante**

  - $u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} f(t)\,.\,\mathrm{d}t - \int_0^n f(t)\,.\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \underbrace{f(t)}\,.\,\mathrm{d}t$

    si f positive sur tout $[\,n\,;n+1\,]$ (donné ou à démontrer),
    alors l'intégrale aussi, et donc $u_{n+1} - u_n$ aussi.

  - $v_{n+1} - v_n = \int_a^b f_{n+1}(t)\,.\,\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\,.\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\underbrace{f_{n+1}(t) - f_n(t)})\,.\,\mathrm{d}t$

    si $f_{n+1} - f_n$ positive sur $[\,a\,;b\,]$ (donné ou à démontrer),
    alors l'intégrale est positive, et donc $v_{n+1} - v_n$ aussi.

- **Montrer qu'une telle suite est majorée**

  - Si $\underbrace{f \leqslant g}$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$, alors $u_n \leqslant \int_0^n \underbrace{g(t)}\,.\,\mathrm{d}t$

    en général démontré
    dans une question précédente

    si g admet une primitive,
    alors on peut calculer cette intégrale majorante en fonction de n.

  - Si pour tout n, $\underbrace{f_n \leqslant g}$ sur $[\,a\,;b\,]$, alors $v_n \leqslant \int_a^b \underbrace{g(t)}\,.\,\mathrm{d}t$

    en général démontré
    dans une question précédente

    si g admet une primitive,
    alors on peut calculer cette intégrale majorante.

Remarque : Vous aurez beaucoup de comparaisons à démontrer…

N'oubliez pas que, pour montrer que $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$, il suffit de démontrer que $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ est négatif (on factorise et on étudie chaque signe).

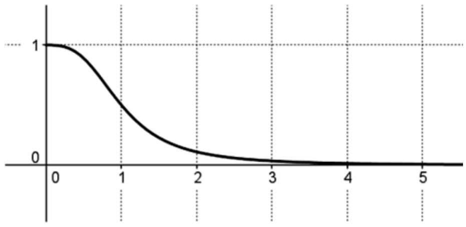
Ce que je dois aussi savoir faire

- **Calculer une intégrale** → voir fiche ***INT 01***
- Et bien sûr, **tous les types de questions habituelles sur les suites** (notamment le théorème de convergence monotone et le théorème des gendarmes, très utilisés).

Remarques sur les exercices

- Exercice **1.** : le rang est une borne d'intégration.
  De quoi travailler les comparaisons et les jeux avec les bornes.
- Exercice **2.** : le rang est un paramètre de fonctions f_n .
  Exercice long et très complet dans toutes les techniques abordées, y compris de l'algorithmique, avec une dernière question très pimentée, qui permet vérifier si vous avez compris l'introduction du calcul intégral !
- Exercice **3.** : le rang est un paramètre de fonctions f_n . Plus simple que le précédent, mais moins guidé...
- Les exercices **4.** et **5.** se ressemblent. Ils utilisent tous les deux $u_n + u_{n+1}$ d'une jolie manière.
- L'exercice **7.** est un peu à part. Il n'y a pas de suite d'intégrale mais une intégrale à paramètre.
  Il est très intéressant car il finit sur des questions de probabilités originales.

Exercice 1.



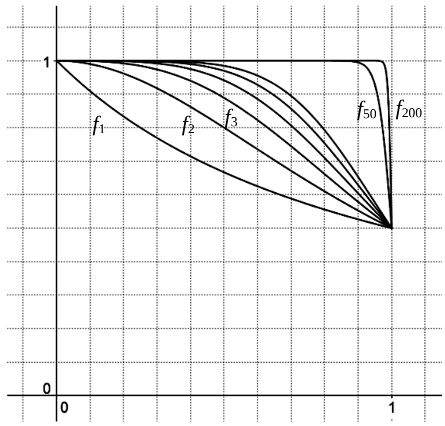
On considère la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $I_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^3} \, . \, dx$.

On a représenté ci-contre la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ sur $[\, 0 \, ; +\infty \, [$.

1. Donner une interprétation graphique de I_1 .
2. Démontrer que (I_n) est croissante.
3. Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a $\frac{1}{1+x^3} \leqslant 1$ et $\frac{1}{1+x^3} \leqslant \frac{1}{x^3}$.
4. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $I_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3} \, . \, dx$.

   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $I_n \leqslant \frac{3}{2}$.
5. Montrer que (I_n) est convergente.

Exercice 2.



Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[\, 0 \, ; 1 \,]$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par $I_n = \int_0^1 f_n(x) \, . \, dx$.

Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-contre.

1. En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Calculer la valeur exacte de I_1 .
3. Démontrer que (I_n) est croissante.
4. ***a)*** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[\, 0 \, ; 1 \,]$ et pour tout entier naturel $n > 1$, on a $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel $n > 1$, on a $I_n \leqslant 1$.
5. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[\, 0 \, ; 1 \,]$ et pour tout entier naturel $n > 1$, on a $1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$.

6. Calculer l'intégrale $\int_0^1 (1 - x^n) \, . \, \mathrm{d}x$.

7. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

8. Dans l'algorithme suivant, les variables n et p contiennent des entiers naturels strictement supérieurs à 1.

$I \leftarrow 0$
Pour k allant de 0 à $p-1$ faire :
  $x \leftarrow \dfrac{k}{p}$
  $I \leftarrow I + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$
Fin Pour
Afficher I

a) Quelle valeur, arrondie au centième, est contenue dans la variable I à la fin de cet algorithme si la variable n contient 2 et la variable p contient 5 ?
On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.
Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b) Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n .

D'après Baccalauréat Asie 2014

Exercice 3.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}$.

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$.

2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[\,0\,;1\,]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}}$ (on rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$).

3. Montrer alors que $\int_0^1 f(x) \, . \, \mathrm{d}x = \ln(2) + 1 - \ln(1+\mathrm{e})$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[\,0\,;1\,]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\,\mathrm{e}^{1-x}}$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

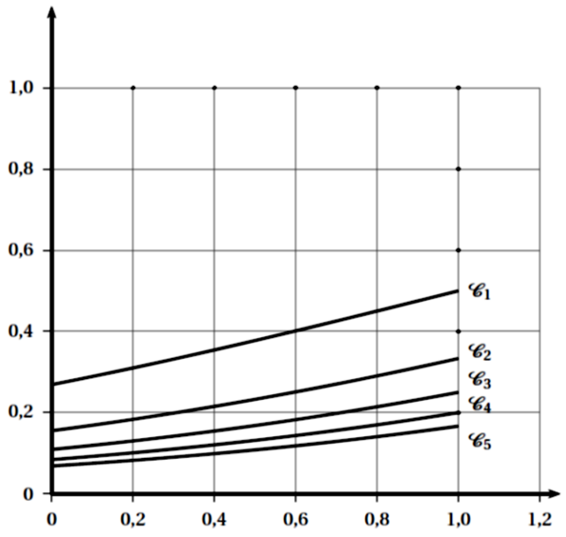
On considère la suite de terme général $u_n = \int_0^1 f_n(x) \, . \, \mathrm{d}x$.

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5.
Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0 .

2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0 .

3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.

4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?



D'après Baccalauréat Liban 2016

Exercice 4.

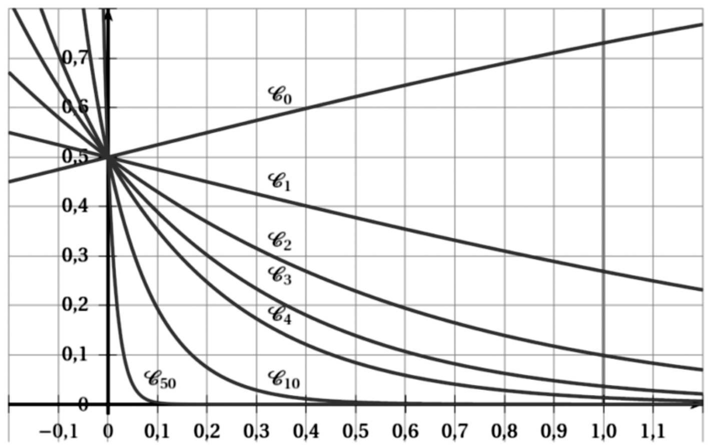
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-(n-1)x}}{1 + e^x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a représenté ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_n$ pour différentes valeurs de n.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,.\,dx$.



Partie A - Étude graphique

1. Donner une interprétation graphique de u_n.

2. Quelles conjectures peut-on faire concernant les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

3. Proposer, à l'aide du graphique et en expliquant la démarche, un encadrement de u_4 d'amplitude 0,05.

D'une part, l'amplitude demandée est très faible…

D'autre part, il est difficile de tomber sur un majorant et un minorant dont la différence sera exactement de 0,05.

Partie B - Étude théorique

1. Montrer que $u_0 = \ln \dfrac{1 + e}{2}$.

2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$ puis en déduire u_1.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

a) Montrer que, pour tout nombre réel x , $d_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

b) Étudier le signe de la fonction d_n sur l'intervalle $[\,0\,;\,1\,]$.

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

b) En déduire la valeur de ℓ .

c) On souhaite construire un algorithme qui affiche la valeur de u_N pour un entier naturel N non nul saisi par l'utilisateur.
Recopier et compléter l'algorithme suivant, dans lequel U est un nombre réel et K un entier naturel :

$K \leftarrow 1$
$U \leftarrow 1 - \ln\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}$
Tant que $K < N$
    $U \leftarrow \ldots$
    $K \leftarrow \ldots$
Fin Tant que
Afficher U

D'après Baccalauréat Antilles Septembre 2016

Exercice 5.

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n , $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,.\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,.\,\mathrm{d}x$.

2. *a)* Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire la valeur exacte de u_1 .

3. *a)* Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

$u \leftarrow \ldots$
Pour i variant de 1 à …
    $u \leftarrow \ldots$
Fin de Pour
Afficher u

b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4. *a)* Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

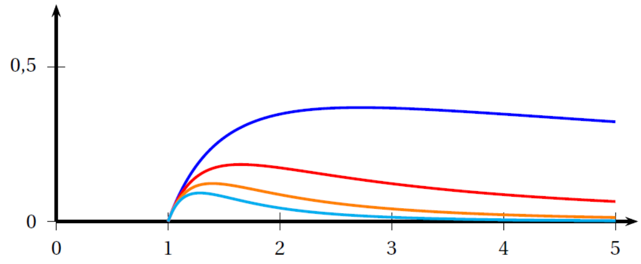
c) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Démontrer que $\ell = 0$.

D'après Baccalauréat Liban 2015

Exercice 6.

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[\,1\,;\,5\,]$ par $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$.

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour n appartenant à $\{\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[\,1\,;\,5\,]$: $f_n\,'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$.

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[\,1\,;\,5\,]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathscr{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.

Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(x)$.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[\,1\,;\,5\,]$: $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}$.

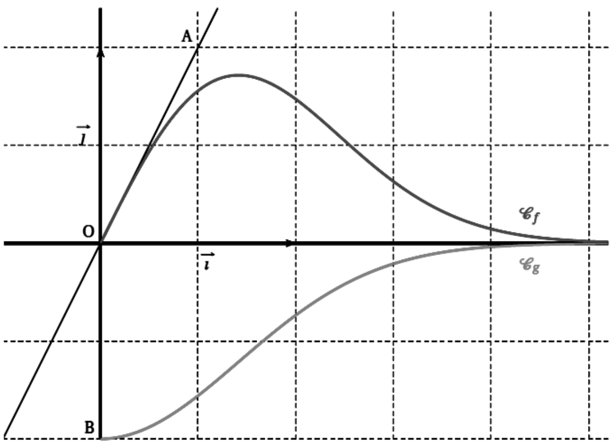
b. Montrer que pour tout entier $n > 1$: $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,.\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$.

c. Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe de f_n, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathscr{C}_n$.
Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

D'après Baccalauréat Liban 2018

Exercice 7.

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $(\,O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$, de deux fonctions f et g définies sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
On considère les points $A\,(\,0{,}5\,;\,1\,)$ et $B\,(\,0\,;\,-1\,)$ dans le repère $(\,O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.
On sait que O appartient à $\mathscr{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O.



1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = (\,ax + b\,)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels.
Déterminer les valeurs exactes des réels a et b, en détaillant la démarche.

Désormais, on considère que $f(x) = 2x\,e^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[\,0\,;+\infty\,[$.

2. **a.** On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

3. La fonction g dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ passe par le point $B\,(\,0\,;-1\,)$ est une primitive de la fonction f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

a. Déterminer l'expression de $g(x)$.

b. Soit m un réel strictement positif.

Calculer $I_m = \displaystyle\int_0^m f(t)\,.\,dt$ en fonction de m .

c. Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} I_m$.

4. **a.** Justifier que f est une fonction densité de probabilité sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

b. Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité.
Justifier que, pour tout réel x de $[\,0\,;+\infty\,[$, $P(\,X \leqslant x\,) = g(x) + 1$.

c. En déduire la valeur exacte du réel α tel que $P(\,X \leqslant \alpha\,) = 0{,}5$.

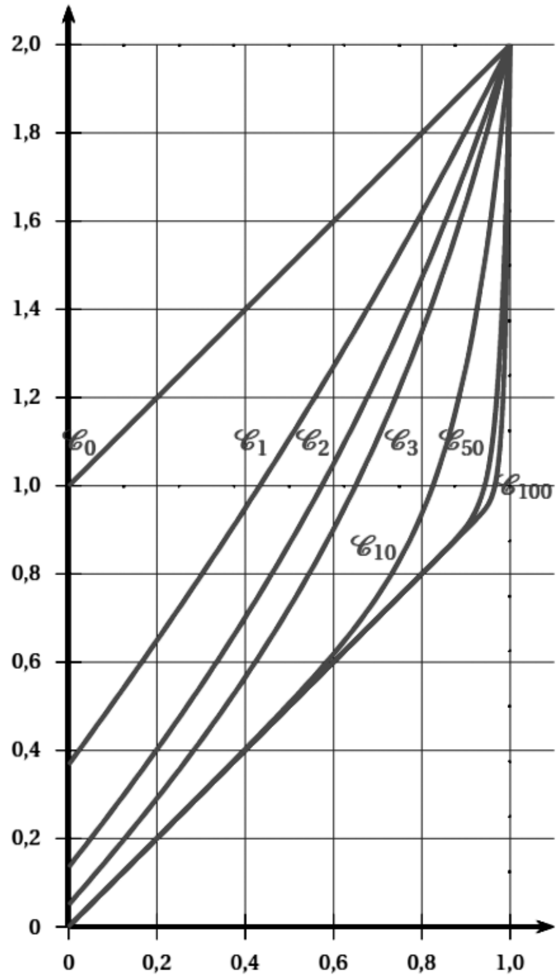
d. Sans utiliser une valeur approchée de α , construire dans le graphique ci-dessus le point de coordonnées $(\,\alpha\,;0\,)$ en laissant apparents les traits de construction.
Hachurer ensuite la région du plan correspondant à $P(\,X \leqslant \alpha\,)$.

D'après Baccalauréat Amérique du Sud 2016

Exercice 8.

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ par $f_n(x) = x + e^{n(x-1)}$.

On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Quelques-unes des courbes $\mathscr{C}_n$ sont représentées ci-contre :



Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$.

2. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ ont toutes un point commun A , et préciser ses coordonnées.

3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathscr{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?
Démontrer cette conjecture.

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0 ; 1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$.
Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$.
Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie C : aire sous les courbes $\mathscr{C}_n$

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.

D'après Baccalauréat Asie 2015

Exercice 9.

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$.

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x) \,.\, dx$.
On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $e^x - x > \dfrac{e^x}{2}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\, e^{-x} \,.\, dx$.

b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que $H(x) = (-x - 1)\, e^{-x}$.
Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente.
On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables K et i sont des entiers naturels, K non nul étant saisi par l'utilisateur, et les variables A, x et h sont des réels :

$A \leftarrow 0$
$x \leftarrow 0$
$h \leftarrow \dfrac{1}{K}$
Pour i variant de 1 à K
    $A \leftarrow A + h \times f(x)$
    $x \leftarrow x + h$
Fin Pour
Afficher A

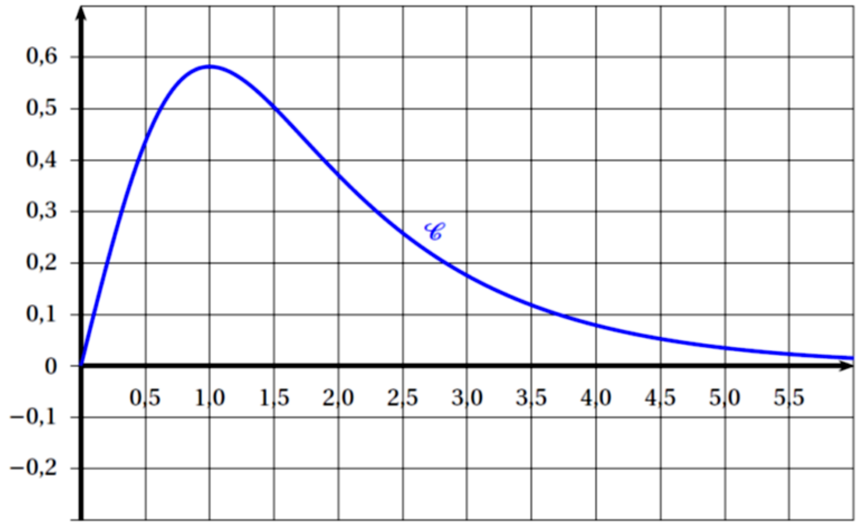
1. Reproduire et compléter le tableau ci-contre, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$.
Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

i	A	x
1		
2		
3		
4		

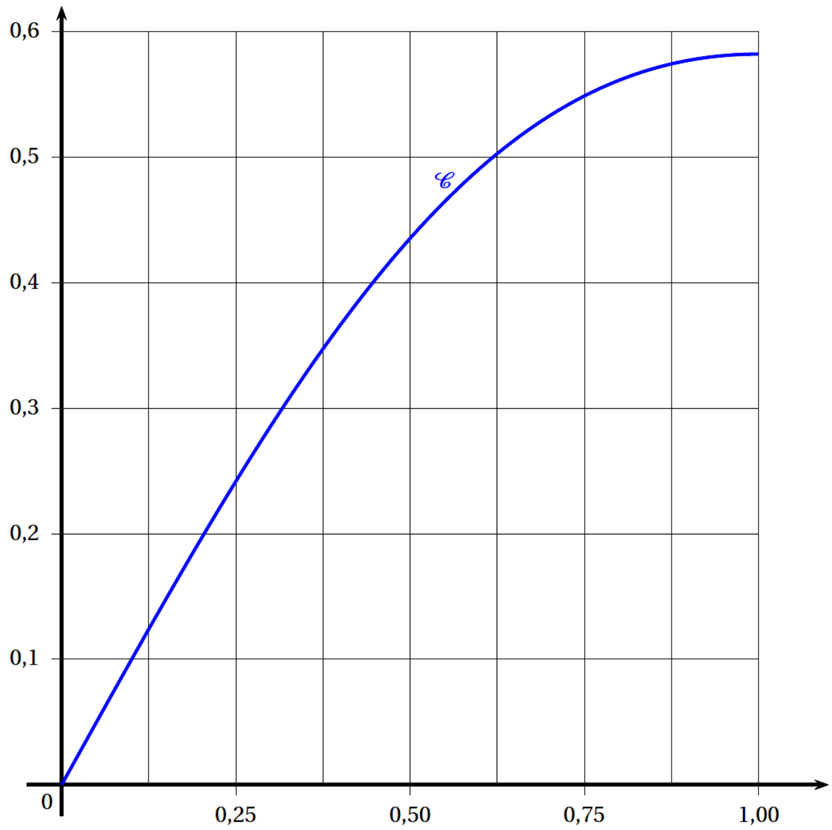
2. En l'illustrant sur l'annexe **à rendre avec la copie**, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $K = 8$.

3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,6]$



Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,1]$



D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2015

AM NORD 2013 (PETIT)
METROPOLE 2014 VOIR EVALUATION DERNIERE
ASIE 2016 BIZARRE

EXERCICE 2 — 3 points

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = a\mathrm{e}^{ax} + a.$$

On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 :

$$I(a) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. On pose dans cette question $a = 0$. Déterminer $I(0)$.
2. On pose dans cette question $a = 1$.
   On étudie donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f_1(x) = \mathrm{e}^{x} + 1.$$
   a. Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaître le nombre $I(1)$.
   b. Calculer la valeur exacte de $I(1)$, puis arrondir au dixième.
3. Existe-il une valeur de a pour laquelle $I(a)$ est égale à 2 ?
   Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.*

ANTILLES SEPT 2015 VOIR CARDIO