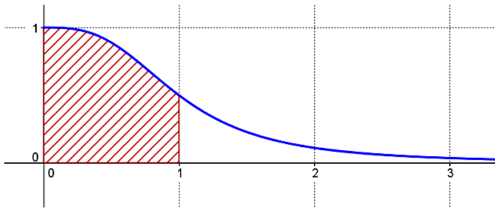
Correction de T^{ale} S - INTÉGRATION - Fiche 2

Exercice1.

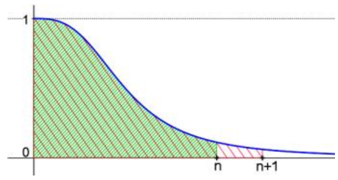
1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ est positive sur $[\,0\,;1\,]$ → *Attention, une intégrale n'est une aire que si la fonction est positive ! Il faut le préciser...*

donc $\int_0^n 0;1 \frac{1}{1+x^3}\,.\,dx$ est l'aire comprise entre la courbe de $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$

.



2. *On ne perd pas ses habitudes sur les suites, on va étudier $I_{n+1} - I_n$.*
Un petit schéma et on voit tout de suite ce que la différence entre les deux aires est l'intégrale entre n et $n+1$:



Pour tout $n \geqslant 1$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} \frac{1}{1+x^3}\,.\,dx - \int_0^n \frac{1}{1+x^3}\,.\,dx$$
$$= \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^3}\,.\,dx$$

Remarque : On peut le justifier proprement avec la relation de Chasles : $\boxed{= \int_0^{n+1} \frac{1}{1+x^3}\,.\,dx + \int_n^0 \frac{1}{1+x^3}\,.\,dx}$.

On peut aussi le justifier avec : $\boxed{= \cancel{\int_0^n \frac{1}{1+x^3}\,.\,dx} + \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^3}\,.\,dx - \cancel{\int_0^n \frac{1}{1+x^3}\,.\,dx}}$

Pas question de chercher à calculer cette intégrale, il suffit de montrer qu'elle est positive.
On utilise la positivité de la fonction :

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$ est positive sur $[\,n\,;n+1\,]$

donc $\int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^3}\,.\,dx \geqslant 0$.

Et donc $I_{n+1} \geqslant I_n$.
La suite (I_n) est bien croissante.

3. ◆ Pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{1+x^3} - 1 = \frac{1-1-x^3}{1+x^3}$$
$$= \frac{-x^3}{1+x^3}$$

→ *N'oubliez pas : pour démontrer $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$, il suffit de démontrer que $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ est négatif.*

Or : $-x^3 < 0$ et $1 + x^3 > 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$,
donc $\frac{1}{1+x^3} - 1 < 0$ et donc $\frac{1}{1+x^3} \leqslant 1$. → *Si on a $\mathcal{A} < \mathcal{B}$, alors on a $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$.*

◆ Pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{1+x^3} - \frac{1}{x^3} = \frac{x^3 - 1 - x^3}{1+x^3}$$
$$= \frac{-1}{1+x^3}$$

Or : $-1 < 0$ et $1 + x^3 > 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$,
donc $\frac{1}{1+x^3} - \frac{1}{x^3} < 0$ et donc $\frac{1}{1+x^3} \leqslant \frac{1}{x^3}$.

4. ◆ *Vous devez avoir repéré que I_n a été décomposé et que les bornes de la 2ème intégrale sont 1 et n .*

Pour tout $n \geqslant 1$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,.\,dx + \int_1^n \frac{1}{1+x^3}\,.\,dx \quad \text{, d'après la relation de Chasles}$$

donc, d'après la question précédente :

$$I_n \leqslant \int_0^1 1\,.\,dx + \int_1^n \frac{1}{x^3}\,.\,dx$$

Or : $\displaystyle\int_0^1 1 \,.\, \mathrm{d}x = [\,x\,]_0^1 = 1 - 0 = 1$.

On a donc bien : $I_n \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^3} \,.\, \mathrm{d}x$.

- *L'intégrale qui reste est facile à calculer car on connaît une primitive de* $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$.

$x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ a pour primitive $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2}$

donc $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^3} \,.\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_1^n = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ car $-\dfrac{1}{2n^2}$ négatif.

On en déduit : $I_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

5. D'après la question *b)* , (I_n) est croissante.
et d'après la question *d)* , (I_n) est majorée par $\dfrac{3}{2}$.

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, (I_n) est convergente. → *Un grand classique...*

Exercice 2.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est positive sur $[\,0\,;\,1\,]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_n(x) \,.\, \mathrm{d}x$ est l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Plus n augmente, plus la courbe de f_n se rapproche de la fonction constante égale à 1 ,
donc plus l'aire se rapproche de l'aire du carré de côté 1 .

Donc, on peut conjecturer que la suite (I_n) converge vers 1 .

2. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x} \,.\, \mathrm{d}x$

Or, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + x$ strictement positive sur $[\,0\,;\,1\,]$.

Donc, elle a pour primitive $\ln u$.

Donc $I_n = [\,\ln(1+x)\,]_0^1$
$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

3. *On a vu sur le graphique que la croissance va venir des fonctions f_n qui sont de plus en plus grandes.*

Pour tout $n \geqslant 1$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} \,.\, \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} \,.\, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n}\right)} \,.\, \mathrm{d}x$$

Il faut étudier le signe de

$$\frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n} = \frac{1+x^n-1-x^{n+1}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}$$
$$= \frac{x^n - x^{n+1}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}$$
$$= \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}$$

Or, pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$: $\begin{cases} x^n \geqslant 0 \\ 1 - x \geqslant 0 \\ 1 + x^{n+1} > 0 \\ 1 + x^n > 0 \end{cases}$

On en déduit que $x \mapsto \dfrac{x^n - x^{n+1}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}$ est positive sur $[\,0\,;\,1\,]$

puis que $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n}\right) \,.\, \mathrm{d}x \geqslant 0$.

Et donc $I_{n+1} \geqslant I_n$.

La suite (I_n) est bien croissante.

4. ***a)*** Pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$ et pour tout $n > 1$:

$$\frac{1}{1+x^n} - 1 = \frac{1-1-x^n}{1+x^n}$$
$$= \frac{-x^n}{1+x^n}$$

Or, $\begin{cases} -x^n \leqslant 0 \\ 1 + x^n > 0 \end{cases}$ donc $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

b) Pour tout $n > 1$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,.\,dx \leqslant \int_0^1 1\,.\,dx \text{ d'après la question précédente}$$

Or, $\int_0^1 1\,.\,dx = [\,x\,]_0^1 = 1 - 0 = 1$

donc $I_n \leqslant 1$.

5. Pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$ et pour tout $n > 1$:

$$1 - x^n - \frac{1}{1+x^n} = \frac{(1-x^n)(1+x^n) - 1}{1+x^n}$$
$$= \frac{1-(x^n)^2 - 1}{1+x^n}$$

→ Avez-vous vu $(a-b)(a+b)$?

$$= \frac{-(x^n)^2}{1+x^n}$$

Or $\begin{cases} -(x^n)^2 \leqslant 0 \\ 1 + x^n > 0 \end{cases}$

donc $1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$.

6. $\int_0^1 (1-x^n)\,.\,dx = \left[\,x - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\right]_0^1$

→ Primitive immédiate d'une somme de deux fonctions usuelles.

$$= 1 - \frac{1}{n+1}1^{n+1} - 0 - \frac{1}{n+1}0^{n+1}$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

7. Vous devez poser votre stylo et bien regarder tout ce qu'on vous a fait démontrer précédemment...
Avec les questions 3. et 4., vous avez une suite croissante majorée donc convergente... Oui, mais... il faut trouver la limite !
Vous avez démontré dans la question 5. que $1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$, c'est certainement pour en déduire une comparaison sur les intégrales, puisque I_n est l'intégrale de $\frac{1}{1+x^n}$ ...

À gauche, vous aurez, d'après la question 6., $1 - \frac{1}{n+1}$, qui tend vers 1 , et à droite I_n .

Voyons... que manque-t-il ? Ah, oui... la question 4. !

D'après la question **5.** : $\int_0^1 (1-x^n)\,.\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,.\,dx$

donc, d'après la question **6.** : $1 - \frac{1}{n+1} \leqslant I_n$.

Et donc, d'après la question **4.** : $1 - \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

On en déduit, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.

8. ***a)***

k	x	I
0	$\frac{0}{5} = 0$	$0 + \frac{1}{1+0^2} \times \frac{1}{5} = 0{,}200$
1	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$0{,}2 + \frac{1}{1+0{,}2^2} \times \frac{1}{5} \approx 0{,}392$
2	$\frac{2}{5} = 0{,}4$	$0{,}392 + \frac{1}{1+0{,}4^2} \times \frac{1}{5} \approx 0{,}564$
3	$\frac{3}{5} = 0{,}6$	$0{,}564 + \frac{1}{1+0{,}6^2} \times \frac{1}{5} \approx 0{,}711$
4	$\frac{4}{5} = 0{,}8$	$0{,}711 + \frac{1}{1+0{,}8^2} \times \frac{1}{5} \approx 0{,}833$

Donc, la valeur de I renvoyée par cet algorithme est 0,83 , arrondie au centième.

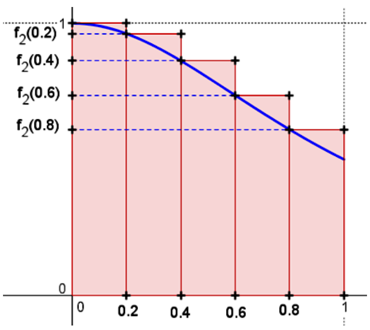
b) Pour $k = 0$, la valeur de I est l'aire du 1er rectangle, de largeur $p = 0{,}2$ et de hauteur 1 .

Pour $k = 1$, $\frac{1}{1+0{,}2^2} \times \frac{1}{5}$ est l'aire du 2ème rectangle, de largeur $p = 0{,}2$ et de hauteur $f_2(0{,}2)$.
La valeur de I est la somme de ces deux aires.

Pour $k = 2$, $\frac{1}{1+0{,}4^2} \times \frac{1}{5}$ est l'aire du 3ème rectangle, de largeur $p = 0{,}2$ et de hauteur $f_2(0{,}4)$.
La valeur de I est la somme de ces trois aires.

Ainsi de suite jusqu'à $k = 4$.

On obtient dans I la somme des aires des rectangles majorants la courbe, avec des intervalles de largeur 0,2.
Plus on prendra une valeur de n grande et une valeur de p petite, plus on se rapprochera de la limite de (I_n) .



Exercice 3.

Partie A

1. ◆ f est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u : x \mapsto 1 + e^{1-x}$ dérivable sur $[\,0\,;\,1\,]$ et $u'(x) = -\,e^{1-x}$.

Donc f est dérivable sur $[\,0\,;\,1\,]$ et $f' = \dfrac{-u'}{u^2}$.

Donc $f'(x) = \dfrac{e^{1-x}}{(\,e^{1-x}\,)^2}$.

◆ Or, pour $x \in [\,0\,;\,1\,]$, $\begin{cases} e^{1-x} > 0 \\ (\,e^{1-x}\,)^2 > 0\,. \end{cases}$

On en déduit que $f'(x) > 0$
et f croissante sur $[\,0\,;\,1\,]$.

2. Pour $x \in [\,0\,;\,1\,]$:

$$\frac{1}{1+e^{1-x}} = \frac{e^x}{e^x\,(\,1+e^{1-x}\,)} = \frac{e^x}{e^x + e^{x+1-x}} = \frac{e^x}{e^x + e}$$

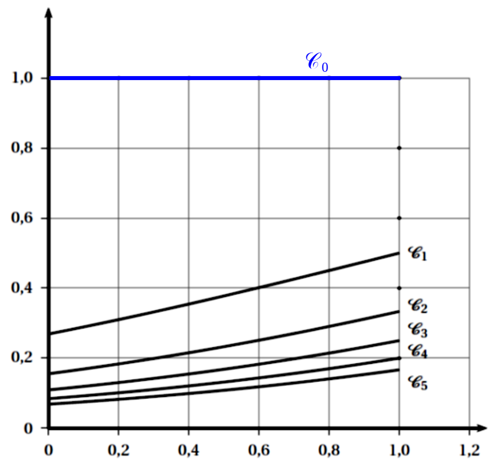
3. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + e}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + e$ strictement positive sur $[\,0\,;\,1\,]$.

Donc, elle a pour primitive $\ln u$.

$$\text{Donc} \int_0^1 f(x)\,.\,dx = [\,\ln(\,e^x + e\,)\,]_0^1$$
$$= \ln(\,e^1 + e\,) - \ln(\,e^0 + e\,)$$
$$= \ln(\,2e\,) - \ln(\,1 + e\,)$$
$$= \ln 2 + \ln e - \ln(\,1 + e\,)$$
$$= \ln 2 + 1 - \ln(\,1 + e\,)$$

Partie B

1. $f_0(x) = \dfrac{1}{1 + 0 \times e^{1-x}} = 1$.



2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1 + n\,e^{1-x}}$ est positive sur $[\,0\,;\,1\,]$,

donc l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,.\,dx$ vaut l'aire comprise entre la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

En particulier, u_0 vaut $\displaystyle\int_0^1 1\,.\,dx = 1$.

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante.

On procède comme dans l'exercice 2. Question 3. :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+(n+1)\,e^{1-x}}\,.\,dx - \int_0^1 \frac{1}{1+n\,e^{1-x}}\,.\,dx$$
$$= \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{1}{1+(n+1)\,e^{1-x}} - \frac{1}{1+n\,e^{1-x}}\right)}_{\text{Il faut étudier le signe de}}\,.\,dx$$

$$\frac{1}{1+(n+1)\,e^{1-x}} - \frac{1}{1+n\,e^{1-x}} = \frac{1+n\,e^{1-x}-1-(n+1)\,e^{1-x}}{(1+(n+1)\,e^{1-x})(1+n\,e^{1-x})}$$

$$= \frac{n\,e^{1-x}-n\,e^{1-x}-e^{1-x}}{(1+(n+1)\,e^{1-x})(1+n\,e^{1-x})}$$

$$= \frac{-e^{1-x}}{(1+(n+1)\,e^{1-x})(1+n\,e^{1-x})}$$

Or, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$: $\begin{cases} -e^{1-x} < 0 \\ 1+(n+1)\,e^{1-x} > 0 \\ 1+n\,e^{1-x} > 0 \end{cases}$

On en déduit que $\dfrac{1}{1+(n+1)\,e^{1-x}} - \dfrac{1}{1+n\,e^{1-x}} < 0$

puis que $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{1+(n+1)\,e^{1-x}} - \frac{1}{1+n\,e^{1-x}}\right).\,dx < 0$.

Et donc $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est bien décroissante.

4. (u_n) est décroissante.
De plus, elle est positive, donc minorée par 0.

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) admet une limite.

Exercice 4.

Partie A

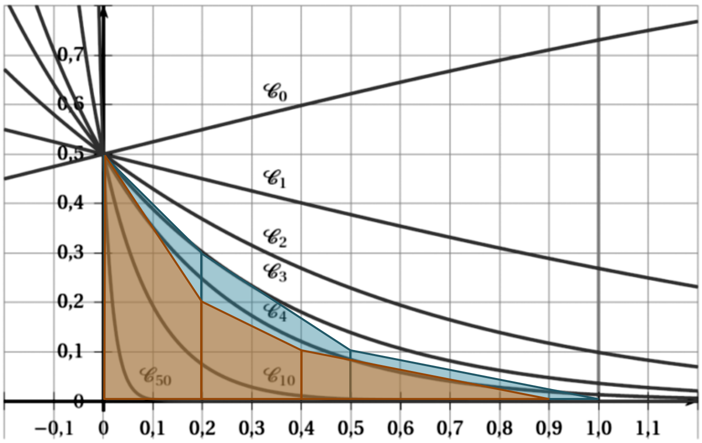
1. Pour tout entier n, la fonction f_n est positive sur $[\,0\,;1\,]$ donc l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,.\,dx$ est l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. On voit sur le graphique que, plus n augmente, plus la courbe de f_n se rapproche de la fonction nulle,
donc on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et tend vers 0 .

3. On minore u_4 par l'aire de deux trapèzes et d'un triangle : $\dfrac{0{,}5+0{,}2}{2} \times 0{,}2 + \dfrac{0{,}2+0{,}1}{2} \times 0{,}2 + \dfrac{0{,}1 \times 0{,}4}{2} = 0{,}12$.

On majore u_4 par l'aire de deux trapèzes et d'un triangle : $\dfrac{0{,}5+0{,}3}{2} \times 0{,}2 + \dfrac{0{,}3+0{,}1}{2} \times 0{,}3 + \dfrac{0{,}1 \times 0{,}5}{2} = 0{,}165$.

On obtient l'encadrement $0{,}12 < u_4 < 0{,}165$ d'amplitude $0{,}165 - 0{,}12 = 0{,}045$.
On en déduit l'encadrement $0{,}12 < u_4 < 0{,}17$ d'amplitude 0,05.



Partie B

1. La fonction $f_0 : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^x$ strictement positive sur $[\,0\,;1\,]$.

Donc, elle a pour primitive $\ln u$.

Donc $u_0 = [\,\ln(1+e^x)\,]_0^1$
$= \ln(1+e^1) - \ln(1+e^0)$
$= \ln(1+e) - \ln 2$
$= \ln \dfrac{1+e}{2}$

2. $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,.\,dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,.\,dx$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x+1}{1+e^x}\,.\,dx = \int_0^1 1\,.\,dx = 1$.

On en déduit :

$\ln\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}+u_1 = 1$ et donc : $u_1 = 1-\ln\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}$. $\longrightarrow$ Qu'on peut écrire $\ln\dfrac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$ mais on retrouvera cette écriture en question 6. c) .

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$: $\begin{cases}\mathrm{e}^{-(n-1)x}>0\\ 1+\mathrm{e}^x>0\end{cases}$ donc $f_n(x)>0$

et donc $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,.\,\mathrm{d}x > 0$.

4. ***a)*** Pour tout x :

$$d_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-(n+1-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}-\frac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-nx}-\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-nx}\,\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

b) Pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$, $\begin{cases}\mathrm{e}^{-nx}>0\\ \mathrm{e}^x\geqslant \mathrm{e}^0=1 \text{ donc } 1-\mathrm{e}^x\leqslant 0\\ 1+\mathrm{e}^x>0\end{cases}$

donc $d_n(x)\leqslant 0$.

5. D'après la question **4.** , pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$, $f_{n+1}(x)-f_n(x)\leqslant 0$ et donc $f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$

donc $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,.\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,.\,\mathrm{d}x$

et donc $u_{n+1}\leqslant u_n$.

On en déduit que (u_n) est décroissante.

De plus, d'après la question **3.** , elle est minorée par 0.
Donc, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) est convergente.

6. ***a)*** Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n+u_{n+1} = \int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}\,.\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-(n+1-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}\,.\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x}\,.\,\mathrm{d}x$$

Je compense avec $\dfrac{1}{-n}$.

$$= \int_0^1\mathrm{e}^{-nx}\,\frac{\mathrm{e}^x+1}{1+\mathrm{e}^x}\,.\,\mathrm{d}x$$

Je force la présence de $u'(x) = -n$.

$$= \int_0^1\mathrm{e}^{-nx}\,.\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{-n}\int_0^1(-n)\,\mathrm{e}^{-nx}\,.\,\mathrm{d}x \quad \text{avec } x\mapsto(-n)\,\mathrm{e}^{-nx} \text{ de la forme } u'\,\mathrm{e}^u$$
$$= \frac{1}{-n}\left[\,\mathrm{e}^{-nx}\,\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{-n}\left(\mathrm{e}^{-n\times1}-\mathrm{e}^{-n\times0}\right)$$
$$= \frac{1}{-n}\left(\mathrm{e}^{-n}-1\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$$

b) D'une part, (u_{n+1}) et (u_n) ont la même limite,
donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n+u_{n+1}) = \ell+\ell = 2\ell$.

D'autre part, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n+u_{n+1}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

Or : $\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-n})=1\\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty\end{cases}$ donc, par quotient, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} = 0$.

On en déduit $2\ell=0$ et donc $\ell=0$.

c)

$K\leftarrow 1$
$U\leftarrow 1-\ln\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}$ $\longrightarrow$ Valeur de u_0
Tant que $K<N$
  $U\leftarrow\dfrac{1-\mathrm{e}^{-K}}{K}-U$ $\longrightarrow$ De la relation $u_n+u_{n+1}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$, on déduit la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}-u_n$.
  $K\leftarrow K+1$
Fin Tant que
Afficher U

Exercice 5.

1. $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,.\,dx$ où $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1+x$ positif sur $[\,0\,;1\,]$

$= [\,\ln(1+x)\,]_0^1$

$= \ln(1+1) - \ln(1+0)$

$= \ln 2$

2. ***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,.\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,.\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\,.\,dx \\ &= \int_0^1 x^n\,\frac{x+1}{1+x}\,.\,dx \\ &= \int_0^1 x^n\,.\,dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

b) $u_1 + u_0 = \frac{1}{0+1}$

et donc $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln 2$.

3. ***a)*** $u \leftarrow \ln 2$

Pour i variant de 1 à n

$u \leftarrow \frac{1}{i} - u$ → De la relation $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$, on déduit la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} - u_n$.

Fin de Pour

Afficher u

b) On peut conjecturer que (u_n) est décroissante et tend vers 0.

4. ***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,.\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,.\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x}\right).\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}\,.\,dx \\ &= \int_0^1 x^n\,\frac{x-1}{1+x}\,.\,dx \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$: $\begin{cases} x^n \geqslant 0 \\ x-1 \leqslant 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$ donc $x^n\,\frac{x-1}{1+x} \leqslant 0$.

On en déduit que $\int_0^1 x^n\,\frac{x-1}{1+x}\,.\,dx \leqslant 0$.

Et donc $u_{n+1} \leqslant u_n$.

La suite (u_n) est bien décroissante.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [\,0\,;1\,]$: $\begin{cases} x^n \geqslant 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$ donc $\frac{x^n}{1+x} \geqslant 0$.

On en déduit que $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,.\,dx \leqslant 0$.

Et donc $u_n \geqslant 0$.

La suite (u_n) est donc minorée par 0.

Comme elle est décroissante, on en déduit, d'après le théorème de convergence monotone, qu'elle est convergente.

c) D'une part, (u_{n+1}) et (u_n) ont la même limite,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + u_{n+1}) = \ell + \ell = 2\ell$.

D'autre part, d'après la question **2. *a)***, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + u_{n+1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

On en déduit $2\ell = 0$ et donc $\ell = 0$.

Exercice 6.

1. Pour tout $n > 0$, f_n est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = \ln x \text{ et } u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x^n \text{ et } v'(x) = n\,x^{n-1} \end{cases}$

donc f_n dérivable sur $[1;5]$ et $f_n' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

et donc $f_n'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^n - (\ln x) \times n\,x^{n-1}}{(x^n)^2}$

$= \frac{x^{n-1} - (\ln x) \times n\,x^{n-1}}{x^n \times x \times x^{n-1}}$

$= \frac{1 - n\ln x}{x^{n+1}}$

2. Retenez absolument qu'à un maximum, la dérivée s'annule !

Pour tout $n > 0$:

- Trouvons l'abscisse où est atteint le maximum :

$f_n'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1 - n\ln x}{x^{n+1}} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - n\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

- Trouvons l'ordonnée :

$f_n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}) = \frac{\ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})}{(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^n} = \frac{\frac{1}{n}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{n\mathrm{e}}$

Donc A_n a pour coordonnées $(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} ; \frac{1}{n\mathrm{e}})$.

- Montrons que le point de coordonnées $(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} ; \frac{1}{n\mathrm{e}})$ appartient à la courbe d'équation $y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x)$ en testant les coordonnées dans l'équation :

$\frac{1}{\mathrm{e}}\ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{\mathrm{e}} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n\mathrm{e}}$

Donc $A_n \in \Gamma$.

3. **a.** Pour tout $n > 1$ et tout $x \in [1;5]$:

$1 \leqslant x \leqslant 5$

donc $\ln 1 \leqslant \ln x \leqslant \ln 5$ car $\ln$ strictement croissante sur $[1;5]$

donc $0 \leqslant \frac{\ln x}{x^n} \leqslant \frac{\ln 5}{x^n}$ car $x^n > 0$ sur $[1;5]$

b. Pour tout $n > 1$:

$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,.\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-n} \times \frac{1}{x^{n-1}} \right]_1^5$

$= \frac{1}{1-n} \times \frac{1}{5^{n-1}} - \frac{1}{1-n} \times \frac{1}{1^{n-1}}$

$= \frac{1}{1-n}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$

c. f_n est positive sur $[1;5]$ donc, l'aire vaut $\mathcal{A}_n = \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,.\,\mathrm{d}x$.

D'après la question **3. a.**, pour tout $n > 1$ et tout $x \in [1;5]$, $0 \leqslant \frac{\ln x}{x^n} \leqslant \frac{\ln 5}{x^n}$

donc : $\int_1^5 0\,.\,\mathrm{d}x \leqslant \mathcal{A}_n \leqslant \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,.\,\mathrm{d}x$.

donc, d'après la question **3. b.** : $0 \leqslant \mathcal{A}_n \leqslant \frac{1}{1-n}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$.

Or : $\begin{cases} 5 > 1 \text{ donc } \lim\limits_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty \text{ donc, par inverse et somme, } \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-n} = 0 \end{cases}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-n}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0$

et donc, par encadrement (ou d'après le théorème des gendarmes), $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = 0$.

Exercice 7.

1.

- *Première information : le point O est sur la courbe*

  O appartient à $\mathscr{C}_f$
  donc $f(0) = 0$
  $\Leftrightarrow$ $(a\times 0 + b)\,e^{-0^2} = 0$
  $\Leftrightarrow$ $b = 0$

- *Nous n'avons pas de deuxième point pour trouver a.*
  La seule autre information concerne la tangente : on a le coefficient directeur de cette tangente qui est égal au nombre dérivé.
  Il faut donc calculer la dérivée...

  f est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = ax \text{ et } u'(x) = a \\ v(x) = e^{-x^2} \text{ et } v'(x) = -2x\,e^{-x^2} \end{cases}$

  donc f dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et $f' = u'v + uv'$

  et donc $f'(x) = a\,e^{-x^2} + ax\,(-2x\,e^{-x^2})$
  $= (a - 2ax^2)\,e^{-x^2}$

  (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O

  donc son coefficient directeur $\dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \dfrac{1-0}{0,5-0} = 2$ est égal à $f'(0) = (a - 2a\times 0^2)\,e^{-0^2} = a$

  et donc $a = 2$.

2. a. *L'indication donnée montre bien les croissances comparées $\dfrac{X}{e^X}$ avec $X = x^2$.*

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$

donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. D'après la question **1.**, $f'(x) = (2 - 2\times 2x^2)\,e^{-x^2} = (2 - 4x^2)\,e^{-x^2}$

Pour tout x, $e^{-x^2} > 0$
donc $f'(x)$ est du signe de $2 - 4x^2$.

$2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

De plus, $2 - 4x^2$ est du signe de son coefficient dominant -4 négatif à l'extérieur des racines.

x	0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
signes de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$
$= \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}$

3. a. La fonction $f : x \mapsto 2x\,e^{-x^2} = -(-2x)\,e^{-x^2}$ est de la forme $-u'\,e^u$ avec $u(x) = -x^2$
donc, ses primitives sont de la forme $-e^u + k : x \mapsto -e^{-x^2} + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

$\mathscr{C}_g$ passe par $B(0\,;-1)$
donc $g(0) = -1$
donc $-e^{-0^2} + k = -1$
$\Leftrightarrow$ $k = 0$

donc $g(x) = -e^{-x^2}$.

b. $I_m = \displaystyle\int_0^m f(t)\,.\,dt$
$= \left[-e^{-x^2}\right]_0^m$
$= -e^{-m^2} + e^{-0^2}$
$= 1 - e^{-m^2}$

c. $\begin{cases} \lim\limits_{m\to+\infty} (-m^2) = -\infty \\ \lim\limits_{M\to-\infty} e^M = 0 \end{cases}$

donc, par composition, $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{-m^2} = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{m\to+\infty} I_m = 1$.

4. **a.** $\begin{cases} \text{D'après son tableau de variations, } f \text{ est continue et positive sur } [\,0\,;+\infty\,[\\ \lim\limits_{m\to+\infty} \displaystyle\int_0^m f(t)\,.\,\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$

donc f est une fonction densité de probabilité sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

b. Pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$:

$$\begin{aligned} P(X \leqslant x) &= \int_0^x f(t)\,.\,\mathrm{d}t \\ &= [\,g(t)\,]_0^x \\ &= g(x) - g(0) \\ &= g(x) + 1 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} & P(X \leqslant \alpha) = 0{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & g(\alpha) + 1 = 0{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & -\mathrm{e}^{-\alpha^2} + 1 = 0{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{-\alpha^2} = 0{,}5 \\ \Leftrightarrow\ & \ln(\mathrm{e}^{-\alpha^2}) = \ln\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & -\alpha^2 = -\ln 2 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha^2 = \ln 2 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha = \sqrt{\ln 2} \quad \text{car } \alpha \geqslant 0 \end{aligned}$$

d. Pour placer α , on utilise $g(\alpha) + 1 = 0{,}5$ et donc $g(\alpha) = -0{,}5$.