Savoir CALCULER DES INTÉGRALES ET DES AIRES

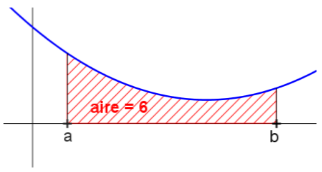
Ce que je dois avoir compris

- **Le rapport entre intégrale et aire**

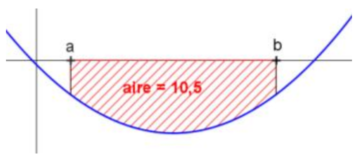
Nous noterons $\mathcal{A}$ l'aire du domaine compris entre les 4 frontières $\begin{cases} \text{la courbe } \mathscr{C}_f \text{ représentative de } f \\ \text{l'axe des abscisses} \\ \text{la droite verticale d'équation } x = a \\ \text{la droite verticale d'équation } x = b\,. \end{cases}$

L'unité d'aire est $\mathrm{u.a.}$, l'aire du rectangle de côtés OI et OJ, où (O, I, J) est le repère orthogonal du plan.

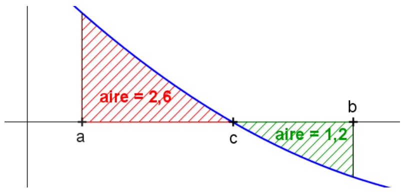
- Si la fonction f est positive sur $[a\,;b]$, alors l'intégrale est positive et $\int_a^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x = \mathcal{A}$.
- Si la fonction f est négative sur $[a\,;b]$, alors l'intégrale est négative et $\int_a^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}$.



$\int_a^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x = 6$



$\int_a^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x = -10{,}5$

- 

Si la fonction f n'est pas de signe constant, on décompose sur plusieurs intervalles :

$$\int_a^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,.\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x$$
$$= \quad 2{,}6 \quad + \quad (-1{,}2) \quad = 1{,}4\,.$$

Ce que je dois savoir faire

- Calculer une primitive

  Voir la fiche *PREPA BAC - F5 - Calculer des primitives, résoudre des équations différentielles.*

- **Calculer une intégrale avec une primitive**
  - On trouve une primitive F de f sur $[a\,;b]$, et alors $\int_a^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x = [\,F(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)$.

    Pas de souci de constante, la formule est valable pour toute primitive, en particulier celle qui a une constante nulle.
  - On peut décomposer le calcul avec les propriétés suivantes :

    $\int_a^b (f(x) + g(x))\,.\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,.\,\mathrm{d}x$: l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales.

    $\int_a^b \lambda\, f(x)\,.\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x$: on peut sortir une constante multiplicative.

- **Calculer une intégrale avec une aire**
  - Si f positive sur $[a\,;b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x$ est égale à $\mathcal{A}$.

    Si f négative sur $[a\,;b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x$ est égale à $-\mathcal{A}$.
  - Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x)\,.\,\mathrm{d}x = 2\times \int_0^a f(x)\,.\,\mathrm{d}x$.

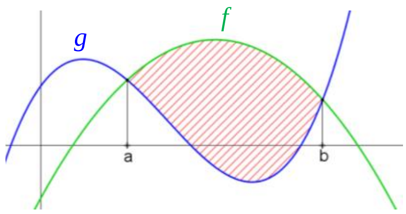
    Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x)\,.\,\mathrm{d}x = 0$.

- **Calculer une aire avec une intégrale**
  - Pour une aire $\mathcal{A}$ définie par la courbe d'une fonction f <u>positive</u> sur $[a\,;b]$: l'aire est égale à $\int_a^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x$.
  - Pour une aire $\mathcal{A}$ définie par la courbe d'une fonction f <u>négative</u> sur $[a\,;b]$: l'aire $\mathcal{A}$ est égale à $-\int_a^b f(x)\,.\,\mathrm{d}x$

    (ce qui donne bien un nombre positif...).
  - Pour une aire $\mathcal{A}$ définie par la courbe d'une fonction f <u>qui n'est pas de signe constant</u> sur $[a\,;b]$:

    - on cherche les valeurs où f change de signe,
    - on décompose en intervalles sur lesquels f est de signe constant.

- Pour une aire $\mathcal{A}$ entre deux courbes de f et de g qui se coupent aux points d'abscisses a et b, et si on a $f \geqslant g$ sur $[\, a\,;\, b\,]$, alors l'aire entre les deux courbes vaut $\int_a^b (\, f(x) - g(x)\,).\mathrm{d}x$.



- **Donner une interprétation graphique d'une intégrale**

  - On demande une interprétation graphique lorsque la fonction est positive (qu'il est important de préciser).
    Phrase à rédiger automatiquement :

    … est positive sur [… ; …],

    donc $\int_{\dots}^{\dots} \dots \,.\mathrm{d}x$ est l'aire en u.a. du domaine compris entre la courbe de … , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \dots$ et $x = \dots$.

- **Calculer une valeur moyenne avec une intégrale**

  - La valeur moyenne de f sur $[\, a\,;\, b\,]$ est $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x).\mathrm{d}x$.

- **Calculer une intégrale par intégration par parties**

  - Si l'énoncé ne vous dit pas explicitement d'utiliser une intégration par parties, vous devrez y penser tous seuls en constatant que la fonction à intégrer n'est pas d'une des formes usuelles connues pour calculer une primitive.

  - **Méthode** : 1) Je repère que f est le produit $\begin{cases} \text{d'une fonction usuelle } u \\ \text{d'une dérivée usuelle } v' \text{ dont je connais une primitive } v. \end{cases}$
    Attention, il peut y avoir plusieurs possibilités.

    Je présente comme d'habitude avec : *f est de la forme uv' avec* $\begin{cases} u(x) = \dots \\ u'(x) = \dots \end{cases}$ *et* $\begin{cases} v'(x) = \dots \\ v(x) = \dots \end{cases}$

    2) J'applique la formule $\int_a^b u(t)\, v'(t)\,.\,\mathrm{d}t \;=\; [\; u(t)\, v(t)\;]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\,.\,\mathrm{d}t$.

    3) Je vérifie que $\int_a^b u'(t)\, v(t)\,.\,\mathrm{d}t$ est calculable.
    Si elle ne l'est pas, je choisis une autre possibilité.

- **Calculer une primitive avec une intégrale**

  - Il suffit de poser que $F : x \mapsto \int_a^x f(x).\mathrm{d}x$, avec a au choix dans l'intervalle I, est une primitive de f sur I.
    Puis d'exprimer cette intégrale en fonction de x.

  - Bien sûr, vous ne trouverez pas cette intégrale avec une primitive ! On tournerait en rond…
    Il faudra utiliser une intégration par parties.

Remarques sur les exercices

- Dans les exercices ① et ②, on calcule des intégrales avec des primitives.
- Dans l'exercice ③, on calcule des intégrales avec des aires.
  Pour les deux fonctions f et g, ne cherchez pas de primitive, vous n'en trouverez pas…
- Dans l'exercice ④, on calcule des aires avec des intégrales.
- Les exercices ⑤ à ⑨ utilisent des intégrations par parties.
  En particulier, l'exercice ⑥ demande de trouver des primitives.
- Les exercices suivants sont des types-bac entiers ou des extraits de types-bac.

---

① Calculer les valeurs exactes des intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_{-2}^{5} (\, 3x^2 - 2x + 7\,).\mathrm{d}x$	**4.** $I_4 = \int_1^{10} \dfrac{5}{x^2}.\mathrm{d}x$	**7.** $I_7 = \int_0^2 \dfrac{2t-3}{t^2-3t+4}.\mathrm{d}t$
2. $I_2 = \int_{\ln 2}^{1} (\, 2\,\mathrm{e}^{\,t} + t\,).\mathrm{d}t$	**5.** $I_5 = \int_0^{\ln 5} \mathrm{e}^{\,2x+1}.\mathrm{d}x$	**8.** $I_8 = \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}.\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \int_1^{\mathrm{e}} (\, t + \dfrac{1}{t}\,).\mathrm{d}t$	**6.** $I_6 = \int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^{\,t}(\, \mathrm{e}^{\,t} + 1\,).\mathrm{d}t$	**9.** $I_9 = \int_{-1}^{1} (\, \dfrac{x}{2} - 1\,)^5.\mathrm{d}x$

10. $I_{10} = \int_0^{\ln 3} \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} \, . \, dx$

11. $I_{11} = \int_1^{e^2} \dfrac{\ln x}{x} \, . \, dx$

12. $I_{12} = \int_{-2}^{1} \dfrac{t}{t^2 + 1} \, . \, dt$

13. $I_{13} = \int_{1/2}^{1} \dfrac{t^2 + 1}{t} \, . \, dt$

14. $I_{14} = \int_{-1}^{1} x\, e^{x^2} \, . \, dx$

15. $I_{15} = \int_0^{1} \dfrac{x}{e^{x^2}} \, . \, dx$

---

② Les exercices **1.** et **2.** sont indépendants.

1. **a.** Démontrer que la fonction H définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}[\ln(x)]^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

b. Calculer $I = \int_1^{e^2} \dfrac{2 - \ln x}{x} \, .dx$.

D'après Baccalauréat S Amérique du Nord 2015

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = x^2\, e^{-2x}$.

On définit $I = \int_0^1 f(x)\, .dx$.

Démontrer qu'une primitive F de la fonction f est donnée par $F(x) = -e^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$.

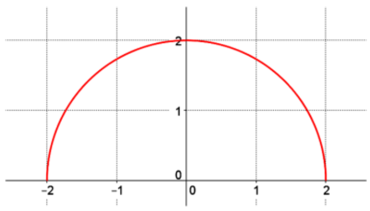
En déduire la valeur exacte de I.

D'après Baccalauréat S Antilles Septembre 2015

---

③ Les exercices **1.** et **2.** sont indépendants.

1. On définit sur $[\,-2\,;2\,]$ la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$ dont la courbe représentative ci-contre est un demi-cercle.

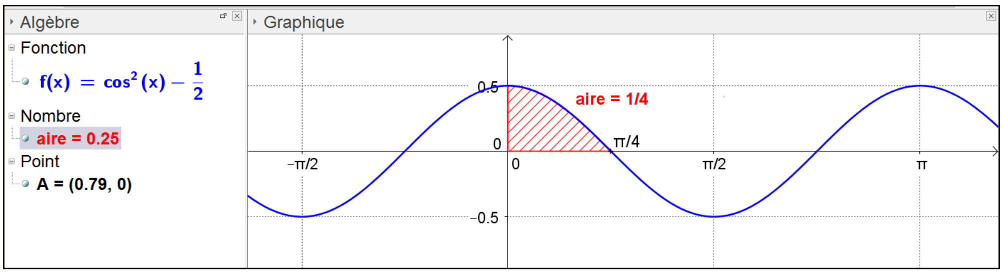


Donner si possible la valeur exacte des intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-2}^{2} f(x)\, .\, dx$; $I_2 = \int_{-1}^{1} f(x)\, .\, dx$; $I_3 = \int_0^{2} f(x)\, .\, dx$; $I_4 = \int_{-1}^{2} f(x)\, .\, dx$;

$I_5 = \int_{-2}^{0} f(x)\, .\, dx$; $I_6 = \int_{-2}^{2} (-f(x))\, .\, dx$.

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (\cos x)^2 - \dfrac{1}{2}$ dont on donne la courbe représentative ci-dessous :



Un logiciel de calcul formel donne $\dfrac{1}{4}$ comme valeur exacte de $\int_0^{\pi/4} g(x)\, .\, dx$.

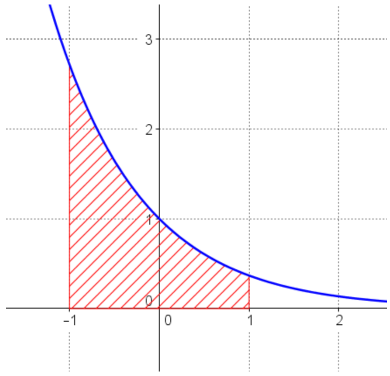
On admet que g est paire et π-périodique.

Par simple lecture graphique, donner la valeur exacte de $I_1 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} g(x)\, .\, dx$, $I_2 = \int_0^{\pi/2} g(x)\, .\, dx$, $I_3 = \int_0^{3\pi/2} g(x)\, .\, dx$ et $I_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(x)\, .\, dx$.

④ Les exercices **1.** à **5.** sont indépendants.

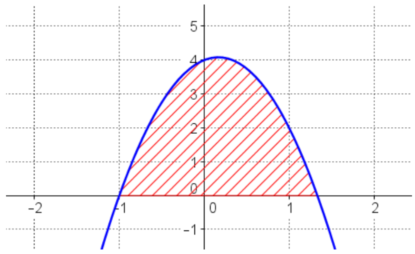
1. On a représenté ci-contre la fonction $g : x \mapsto e^{-x}$.

Calculer, en u.a., l'aire hachurée comprise entre la courbe représentative de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.
On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-2}.



2. On a représenté la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = -3x^2 + x + 4$.

Calculer, en u.a., l'aire hachurée ci-contre comprise entre $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.



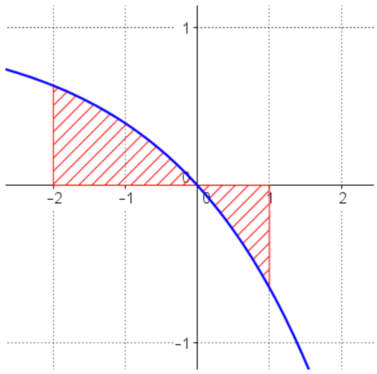
3. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M\,(\,x\,;\,y\,)$ du plan défini par $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{e^x}{e^x - 1} \end{cases}$.

Montrer que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ vaut $\ln(\,e + 1\,)$ unités d'aire.

4. On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - e^{\frac{x}{2}}$.

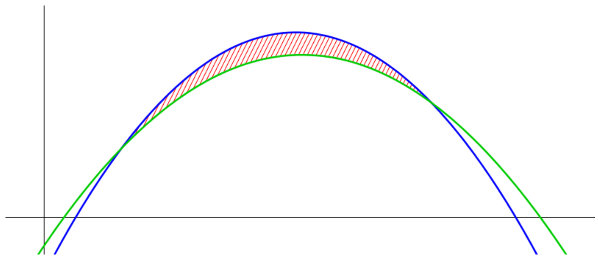
a. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

b. Calculer, en u.a., l'aire hachurée comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.



5. On a représenté ci-contre les fonctions f et g définies par $f(x) = -1{,}5x^2 + 10x - 2{,}5$ et $g(x) = -2x^2 + 13x - 5$.

Calculer, en u.a., l'aire hachurée comprise entre les courbes représentatives de ces deux fonctions.



⑤ Calculer les valeurs exactes des intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_{-1}^{1} x\,e^x\,.\,dx$	**4.** $I_4 = \int_{1}^{2} t \ln t\,.\,dt$	**7.** $I_7 = \int_{1}^{e} (\,2t + 1\,) \ln t\,.\,dt$
2. $I_2 = \int_{0}^{\ln 2} (\,2x - 1\,)\,e^x\,.\,dx$	**5.** $I_5 = \int_{1}^{e} t^2 \ln t\,.\,dt$	**8.** $I_8 = \int_{0}^{1} x^2\,e^x.dx$
3. $I_3 = \int_{0}^{1} (\,t + 1\,)\,e^{t+1}\,.\,dt$	**6.** $I_6 = \int_{-1}^{1} t\,e^{-2t}\,.\,dt$	**9.** $I_9 = \int_{0}^{1} x^3\,e^x.dx$

⑥ Les trois exercices **1.**, **2.** et **3.** sont indépendants.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$.
Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** En remarquant que la fonction constante $t \mapsto 1$ est la dérivée d'une fonction usuelle, utiliser une intégration par parties pour calculer $\int_1^{\mathrm{e}} \ln t \,.\, \mathrm{d}t$.

b. Déterminer une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

3. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^{x}$.

D'après Baccalauréat S Pondichéry 2003

---

⑦ On pose $J = \int_0^4 x\sqrt{x} \,.\, \mathrm{d}x$.

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que $J = 16 - \frac{1}{4}J$.

2. En déduire la valeur de J.

3. Donner une interprétation graphique de J.

---

⑧ Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{2x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

3. Soit un réel α strictement inférieur à -1.
On considère le domaine plan $\mathscr{D}$ limité par $\mathscr{C}$, les droites d'équations $x = \alpha$, $x = -1$ et l'axe des abscisses.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire $D(\alpha)$ du domaine $\mathscr{D}$.

b. Déterminer la limite de $D(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

D'après Baccalauréat S Nouvelle Calédonie Décembre 1999

---

⑨ Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x} \,.\, \mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 puis, en utilisant une intégration par parties, montrer que $I_1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

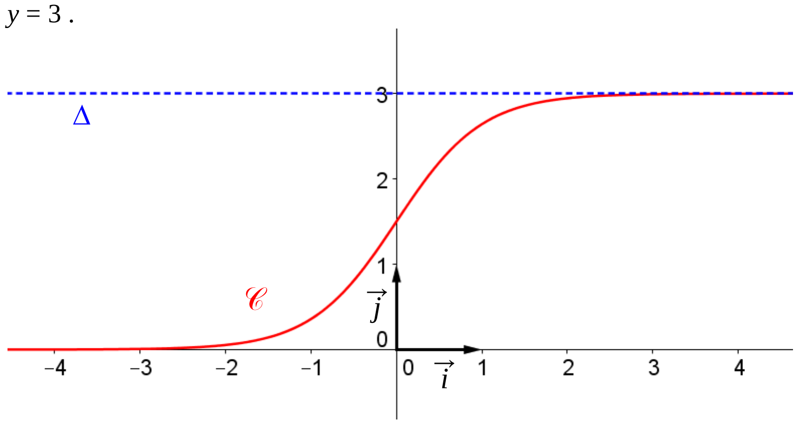
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)\,I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

3. En déduire I_3 et I_4.

⑩ **Partie A**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1 + e^{-2x}}$.

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2} \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$.

Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif.

a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x)\,.\,dx$.

b. Démontrer que $\int_0^a h(x)\,.\,dx = \dfrac{3}{2} \ln\left(\dfrac{2}{1 + e^{-2a}}\right)$.

c. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan défini par $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$.

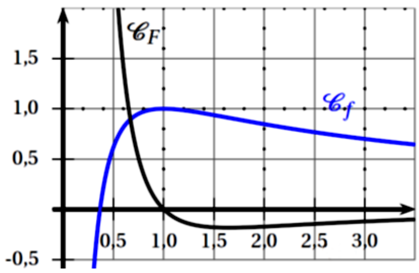
Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

D'après Baccalauréat S Pondichéry 2015

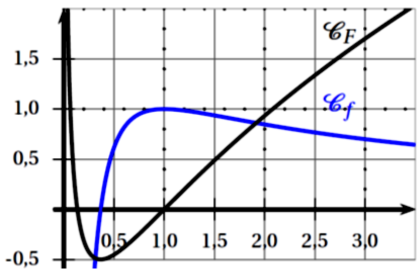
---

⑪ On considère la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(1 + \ln x\right)$.

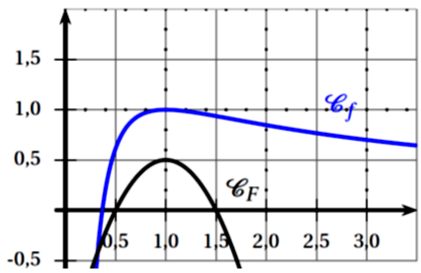
1. Dans les trois situations suivantes, on a dessiné, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et une courbe $\mathscr{C}_F$.
Dans une seule situation, la courbe $\mathscr{C}_F$ est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f.
Laquelle ? Justifier la réponse.



Situation 1



Situation 2



Situation 3

2. Dans la situation retenue à la question **1.**, on appelle :

- K le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses et $\mathscr{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées ;
- L le point d'intersection de $\mathscr{C}_F$ et de l'axe des abscisses, ayant une abscisse supérieure à $\frac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

On admet que le maximum de la fonction f est atteint en l'abscisse de L.

a. Déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathscr{D}$ et Δ, par la courbe $\mathscr{C}_f$ et par l'axe des abscisses.

b. Peut-on déterminer la valeur exacte de cette aire ?

D'après Baccalauréat S Métropole Septembre 2015