Correction de **INTÉGRATION - Fiche 1**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑪

① **1.** *La fonction à intégrer est un simple polynôme, on trouve une primitive directement :*

Une primitive de $x \mapsto 3x^2 - 2x + 7$ est $x \mapsto x^3 - x^2 + 7x$.

Donc $I_1 = \int_{-2}^{5} (3x^2 - 2x + 7).dx$

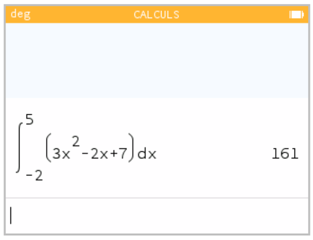
$= [x^3 - x^2 + 7x]_{-2}^{5}$

$= (5^3 - 5^2 + 7\times 5) - ((-2)^3 - (-2)^2 + 7\times(-2))$

$= 135 + 26$ → *Ne détaillez pas les calculs élémentaires.*

$= 161$

Vérifiez votre résultat à la calculatrice !



2. *La fonction à intégrer est une somme de deux fonctions usuelles, on trouve une primitive directement :*

Une primitive de $t \mapsto 2\,e^{t} + t$ est $t \mapsto 2\,e^{t} + \frac{t^2}{2}$.

Donc $I_2 = \int_{\ln 2}^{1} (2\,e^{t} + t) . dt$

$= [2\,e^{t} + \frac{t^2}{2}]_{\ln 2}^{1}$

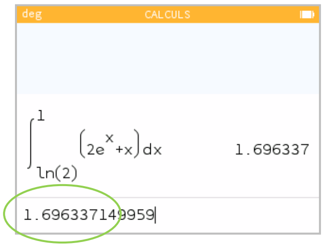
$= (2\,e^{1} + \frac{1^2}{2}) - (2\,e^{\ln 2} + \frac{(\ln 2)^2}{2})$

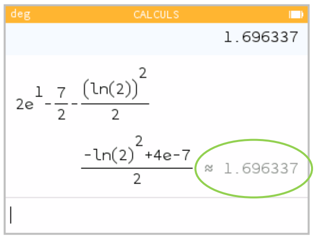
$= 2e + \frac{1}{2} - 4 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$ → *Attention, rien à faire avec* $(\ln 2)^2$.

$= 2e - \frac{7}{2} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$

Il arrive que la calculatrice n'arrive pas à vous donner un résultat simplifié :

À vous de vérifier que votre valeur exacte a la même valeur approchée.





3. Une primitive de $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est $t \mapsto \frac{t^2}{2} + \ln t$. → *Somme de deux fonctions usuelles, on trouve une primitive directement.*

Donc $I_3 = \int_{1}^{e} (t + \frac{1}{t}) . dt$

$= [\frac{t^2}{2} + \ln t]_{1}^{e}$

$= \frac{e^2}{2} + \ln e - (\frac{1^2}{2} + \ln 1)$

$= \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2}$

$= \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$

4. Une primitive de $x \mapsto \frac{5}{x^2}$ est $x \mapsto 5 \times \frac{-1}{x} = \frac{-5}{x}$. → *Fonction usuelle avec une constante multiplicative qui sera conservée.*

Donc $I_4 = \int_{1}^{10} \frac{5}{x^2} . dx$

$= [\frac{-5}{x}]_{1}^{10}$

$= \frac{-5}{10} - \frac{-5}{1}$

$= \frac{9}{2}$

5. La fonction à intégrer n'est pas une fonction usuelle, on ne peut pas trouver une primitive directement.
On cherche alors parmi les formes usuelles du cours et je reconnais vite que ça ne peut être que $u'\,e^u$:

$x \mapsto e^{2x+1} = \boxed{\frac{1}{2}} \times 2\,e^{2x+1}$ est de la forme $\boxed{\frac{1}{2}}\,u'\,e^u$ avec $u(x) = 2x+1$,

je force le 2 car il me le faut pour avoir u'

je compense avec $\frac{1}{2}$ que je garde pour la suite

donc, une primitive est $\boxed{\frac{1}{2}}\,e^u : x \mapsto \boxed{\frac{1}{2}}\,e^{2x+1}$.

Donc $I_5 = \int_0^{\ln 5} e^{2x+1}\,.\,dx$

$= [\,\frac{1}{2}e^{2x+1}\,]_0^{\ln 5}$

$= \frac{1}{2}e^{2\times\ln 5+1} - \frac{1}{2}e^{2\times 0+1}$

$= \frac{1}{2}e^{\ln 5^2}\,e^1 - \frac{e}{2}$ $\longrightarrow$ Je transforme $2\ln 5$ en $\ln 5^2$ pour éliminer $\ln$ avec $\exp$.

$= \frac{1}{2}5^2\,e - \frac{e}{2}$

$= 12e$

---

6. $t \mapsto e^t\,(\,e^t+1\,)$ est de la forme $u'\,u$ avec $u(t) = e^t+1$,
donc, une primitive est $\frac{1}{2}u^2 : t \mapsto \frac{1}{2}(\,e^t+1\,)^2$.

Donc $I_6 = \int_0^{\ln 3} e^t\,(\,e^t+1\,)\,.\,dt$

$= [\,\frac{1}{2}(\,e^t+1\,)^2\,]_0^{\ln 3}$

$= \frac{1}{2}(\,e^{\ln 3}+1\,)^2 - \frac{1}{2}(\,e^0+1\,)^2$

$= 8-2$

$= 6$

---

7. $t \mapsto \frac{2t-3}{t^2-3t+4}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(t) = t^2-3t+4$ positive sur $[\,0\,;2\,]$,
donc, une primitive est $\ln u : t \mapsto \ln(\,t^2-3t+4\,)$.

Donc $I_7 = \int_0^2 \frac{2t-3}{t^2-3t+4}\,.\,dt$

$= [\,\ln(\,t^2-3t+4\,)\,]_0^2$

$= \ln(\,2^2-3\times 2+4\,) - \ln(\,0^2-3\times 0+4\,)$

$= \ln 2 - \ln 4$

$= \ln 2 - \ln 2^2$

$= \ln 2 - 2\ln 2$

$= -\ln 2$

---

8. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+1}} = \boxed{\frac{1}{3}}\frac{3}{\sqrt{3x+1}}$ est de la forme $\frac{1}{3}\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 3x+1$,
donc, une primitive est $\frac{1}{3}2\sqrt{u} : x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{3x+1}$.

Donc $I_8 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,.\,dx$

$= [\,\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\,]_0^1$

$= \frac{2}{3}\sqrt{3\times 1+1} - \frac{2}{3}\sqrt{3\times 0+1}$

$= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}$

$= \frac{2}{3}$

---

9. $x \mapsto (\frac{x}{2} - 1)^5 = 2 \times \frac{1}{2}(\frac{x}{2} - 1)^5$ est de la forme $2\, u'\, u^5$ avec $u(x) = \frac{x}{2} - 1$,

donc, une primitive est $2\,\frac{1}{5+1}\,u^{5+1} : x \mapsto \frac{1}{3}(\frac{x}{2} - 1)^6$.

Donc $I_9 = \int_{-1}^{1} (\frac{x}{2} - 1)^5 \,.\, dx$

$= [\frac{1}{3}(\frac{x}{2} - 1)^6]_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - 1)^6 - \frac{1}{3}(\frac{-1}{2} - 1)^6$

$= -\frac{91}{24}$

---

10. $x \mapsto \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = e^x + 1$,

donc, une primitive est $\frac{-1}{u} : x \mapsto \frac{-1}{e^x + 1}$.

Donc $I_{10} = \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \,.\, dx$

$= [\frac{-1}{e^x + 1}]_0^{\ln 3}$

$= \frac{-1}{e^{\ln 3} + 1} - \frac{-1}{e^0 + 1}$

$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

---

11. $x \mapsto \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \ln x$ est de la forme $u'\, u$ avec $u(x) = \ln x$,

donc, une primitive est $\frac{1}{2} u^2 : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Donc $I_{11} = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} \,.\, dx$

$= [\frac{1}{2}(\ln x)^2]_1^{e^2}$

$= \frac{1}{2}(\ln e^2)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$

$= \frac{1}{2} 2^2$

$= 2$

---

12. $t \mapsto \frac{t}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{2t}{t^2 + 1}$ ln x est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u(t) = t^2 + 1$,

donc, une primitive est $\frac{1}{2} \ln u : t \mapsto \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1)$.

Donc $I_{12} = \int_{-1}^{2} \frac{t}{t^2 + 1} \,.\, dt$

$= [\frac{1}{2} \ln(t^2 + 1)]_{-2}^{1}$

$= \frac{1}{2} \ln(1^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln((-2)^2 + 1)$

$= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5$

---

13. Ne vous faites pas piéger avec cette forme !

$t \mapsto 2\,\frac{t^2 + 1}{2t}$ est de la forme $2\,\frac{u}{u'}$ qui ne fait pas partie de notre catalogue…

$t \mapsto \frac{t^2 + 1}{t} = \frac{t^2}{t} + \frac{1}{t} = t + \frac{1}{t}$ → C'est exactement la même fonction qu'au **3.** !

Vous devez trouver $I_{13} = \frac{3}{8} + \ln 2$.

---

14. $x \mapsto x\,e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x\,e^{x^2}$ est de la forme $\frac{1}{2}u'\,e^u$ avec $u(x) = x^2$,

donc, une primitive est $\frac{1}{2}e^u : x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$.

Donc $I_{14} = \int_{-1}^{1} x\,e^{x^2}\,.\,dx$

$= [\frac{1}{2}e^{x^2}]_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{2}e^{1^2} - \frac{1}{2}e^{(-1)^2}$

$= 0$

On aurait pu remarquer que la fonction est impaire :
$(-x)\,e^{(-x)^2} = -x\,e^{x^2}$.

---

15. $x \mapsto \frac{x}{e^{x^2}} = x\,e^{-x^2} = \frac{1}{-2} \times (-2x)\,e^{-x^2}$ est de la forme $-\frac{1}{2}u'\,e^u$ avec $u(x) = -x^2$,

donc, une primitive est $-\frac{1}{2}e^u : x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$.

Donc $I_{15} = \int_{0}^{1} \frac{x}{e^{x^2}}\,.\,dx$

$= [-\frac{1}{2}e^{-x^2}]_{0}^{1}$

$= -\frac{1}{2}e^{-1^2} + \frac{1}{2}e^{-0^2}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$

---

② **1.** **a.** On vient de calculer plein de primitives mais on n'oublie pas qu'on sait aussi calculer des dérivées et ON NE CONFOND PAS SES FORMULES !

H est de la forme $\frac{1}{2}u^2$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$

donc H est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $H' = \frac{1}{2}2\,u'\,u = u'\,u$

donc $H'(x) = \frac{1}{x}\ln(x) = \frac{\ln(x)}{x} = h(x)$.

donc H est bien une primitive de h sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

b. $I = \int_{1}^{e^2} \frac{2-\ln x}{x}\,.\,dx$

$= \int_{1}^{e^2} (\frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x})\,.\,dx$.

Or, $x \mapsto \frac{2}{x}$ a pour primitive $x \mapsto 2\ln x$

donc, d'après la question précédente, $x \mapsto \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x}$ a pour primitive $x \mapsto 2\ln x - \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$:

donc, $I = [\,2\ln x - \frac{1}{2}[\ln(x)]^2\,]_{1}^{e^2}$

$= 2\ln e^2 - \frac{1}{2}[\ln e^2]^2 - (\ln 1 - \frac{1}{2}[\ln 1]^2)$

$= 2\times2 - \frac{1}{2}2^2 - (0-0)$

$= 2$

---

2. F est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = -e^{-2x} \text{ et } u'(x) = -(-2)\,e^{-2x} = 2\,e^{-2x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \text{ et } v'(x) = x + \frac{1}{2}. \end{cases}$

donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = u'v + uv'$

donc $F'(x) = 2\,e^{-2x}(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}) + (-e^{-2x})(x + \frac{1}{2})$

$= e^{-2x}(x^2 + x + \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2})$

$= x^2\,e^{-2x} = f(x)$

donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

On en déduit :

$I = [-e^{-2x}(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4})]_{0}^{1}$

$= -e^{-2\times1}(\frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + e^{-2\times0}(\frac{0^2}{2} + \frac{0}{2} + \frac{1}{4})$

$= -\frac{5}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$

③ **1.**

- f est positive sur $[-2\,;2]$

  donc $I_1 = \int_{-2}^{2} f(x).\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-2$ et $x=2$

  donc $I_1 = \dfrac{\pi\times2^2}{2}$ → C'est l'aire du demi-disque de rayon 2 .

  $= 2\pi$

- $I_2 = \int_{-1}^{1} f(x).\mathrm{d}x$ n'est pas une aire connue.

- De même : → Vous avez fait un effort méritoire pour rédiger la première fois, on vous épargne de recommencer la même chose.

  $I_3 = \int_{0}^{2} f(x).\mathrm{d}x = \dfrac{\pi\times2^2}{4}$ → C'est l'aire du quart de disque de rayon 2 .

  $= \pi$

- $I_4 = \int_{-1}^{2} f(x).\mathrm{d}x$ n'est pas une aire connue.

- De même : $I_5 = \int_{-2}^{0} f(x).\mathrm{d}x = \dfrac{\pi\times2^2}{4} = \pi$ → C'est l'aire de l'autre quart de disque de rayon 2 .

- $I_6 = \int_{-2}^{2} (-f(x)).\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{2} f(x).\mathrm{d}x$

  $= -2\pi$ → Attention, ce n'est pas une aire !

2.

- g paire

  donc $I_1 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} g(x).\mathrm{d}x = 2\times\int_{0}^{\pi/4} g(x).\mathrm{d}x$.

  Or, g positive sur $[0\,;\frac{\pi}{4}]$

  donc $\int_{0}^{\pi/4} g(x).\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine compris entre la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\frac{\pi}{4}$

  donc $I_1 = 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

- $I_2 = \int_{0}^{\pi/4} g(x).\mathrm{d}x + \int_{\pi/4}^{\pi/2} g(x).\mathrm{d}x$

  Or, g négative sur $[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}]$

  donc $\int_{\pi/4}^{\pi/2} g(x).\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$

  donc $I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$. → On voit deux aires égales, mais l'une au-dessus de l'axe des abscisses et l'autre en-dessous.
  Donc cette intégrale se décompose en deux intégrales opposées.

- De même : $I_3 = \int_{0}^{3\pi/2} g(x).\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi/2} g(x).\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} g(x).\mathrm{d}x$

  $= 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

- De même : $I_4 = 2\times\int_{0}^{\pi/2} g(x).\mathrm{d}x$ car g paire

  $= 2\times0 = 0$

Pour ceux qui voudraient les démonstrations de la parité et de la périodicité, il faudra avoir étudié les fonctions trigonométriques.
Les voici :

Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$g(-x) = (\cos(-x))^2 - \frac{1}{2}$

$= (\cos x)^2 - \frac{1}{2}$ → Si besoin, on fait un petit schéma pour retrouver que $\cos(-x) = \cos x$.

$= g(x)$

$g(x+\pi) = (\cos(x+\pi))^2 - \frac{1}{2}$

$= (-\cos x)^2 - \frac{1}{2}$ → Si besoin, on fait un petit schéma pour retrouver que $\cos(x+\pi) = -\cos x$.

$= (\cos x)^2 - \frac{1}{2}$

$= g(x)$

Donc, g est paire et π-périodique.

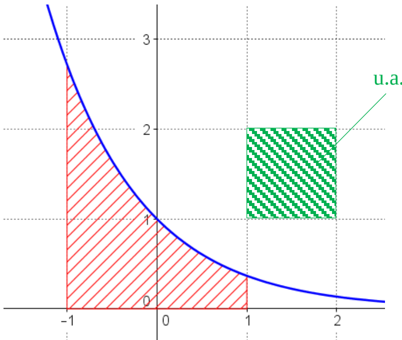
④ **1.** Je repère que la fonction est de signe constant : on n'aura pas besoin de couper l'intervalle en plusieurs morceaux.
Et je repère que la fonction est **positive** sur l'intervalle d'intégration : **l'aire sera égale à l'intégrale**.

- La fonction g est positive sur $[-1\,;1]$
  donc l'aire en u.a. est égale à l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(x)\,.\mathrm{d}x$. } Indispensable !

- $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} = -(-\mathrm{e}^{-x})$ est de la forme $-u'\,\mathrm{e}^{u}$ avec $u(x) = -x$,
  donc, une primitive est $-\mathrm{e}^{u} : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$.

  Donc $\int_{-1}^{1} g(x)\,.\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^{1}$
  $= -\mathrm{e}^{-1} - (-\mathrm{e}^{-(-1)})$
  $= \mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

  Donc l'aire en u.a. vaut $\mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 2{,}35$, arrondie à 10^{-2}.



Le résultat environ égal à 2,35 unités d'aire est cohérent avec la figure.

---

2. On ne nous donne pas les frontières verticales : elles correspondent aux points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
Si la première borne semble être -1, nous n'en sommes pas sûrs et nous n'avons pas la deuxième : il faut les calculer en résolvant l'équation $f(x) = 0$.

- $\Delta = 1^2 - 4\times(-3)\times4 = 49 > 0$
  donc les deux bornes d'intégration sont $\dfrac{-1+\sqrt{49}}{2\times(-3)} = -1$ et $\dfrac{-1-\sqrt{49}}{2\times(-3)} = \dfrac{4}{3}$.

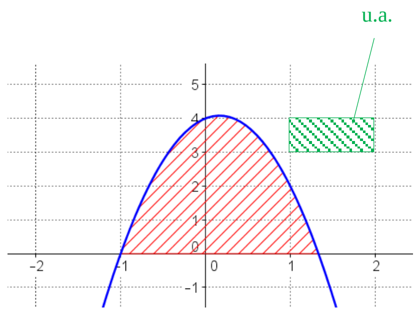
Je repère que la fonction est **positive** sur l'intervalle d'intégration : **l'aire sera égale à l'intégrale**.

- La fonction $x \mapsto -3x^2 + x + 4$ est positive sur $[-1\,;\frac{4}{3}]$
  donc l'aire en u.a. est égale à l'intégrale $\int_{-1}^{4/3} (-3x^2 + x + 4)\,.\mathrm{d}x$.

- Une primitive de $x \mapsto -3x^2 + x + 4$ est $x \mapsto -3\,\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x$.

  Donc $\int_{-1}^{4/3} (-3x^2 + x + 4)\,.\mathrm{d}x = [-x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x]_{-1}^{4/3}$
  $= -(\frac{4}{3})^3 + \frac{1}{2}(\frac{4}{3})^2 + 4\times\frac{4}{3} - (-(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2 + 4\times(-1))$
  $= \dfrac{343}{54}$

  donc l'aire en u.a. vaut $\dfrac{343}{54}$.



On ne demande pas d'arrondi mais on a tout intérêt à vérifier la cohérence du résultat : $\dfrac{343}{54} = 6{,}3...$.
Il n'est pas choquant que l'aire sous la courbe contienne en effet un peu plus de 6 carreaux unités.

---

3. Comprenez bien cette manière de définir un domaine.
La condition $1 \leqslant x \leqslant 2$ signifie que les points de $\mathscr{D}$ sont entre les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$: nous avons nos deux frontières verticales.
La condition $0 \leqslant y$ signifie que les points de $\mathscr{D}$ sont au-dessus de l'axe des abscisses : nous avons notre frontière habituelle.
Et la condition $y \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$ signifie que les points de $\mathscr{D}$ sont en-dessous de la courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$: voici notre 4ème frontière.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est positive sur $[1\,;2]$
  donc l'aire en u.a. est égale à l'intégrale $\int_{1}^{2} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}.\mathrm{d}x$

- $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x - 1$,

  donc, une primitive est $\ln u : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x - 1)$.

  Donc $\int_{1}^{2} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}.\mathrm{d}x = [\ln(\mathrm{e}^x - 1)]_1^2$
  $= \ln(\mathrm{e}^2 - 1) - \ln(\mathrm{e}^1 - 1)$
  $= \ln[(\mathrm{e} - 1)(\mathrm{e} + 1)] - \ln(\mathrm{e} - 1)$
  $= \ln(\mathrm{e} - 1) + \ln(\mathrm{e} + 1) - \ln(\mathrm{e} - 1)$
  $= \ln(\mathrm{e} + 1)$

  donc l'aire en u.a. vaut $\ln(\mathrm{e} + 1)$.

---

4. **a.** $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow\ 1 - e^{\frac{x}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow\ e^{\frac{x}{2}} = e^0$

$\Leftrightarrow\ \frac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow\ x = 0$

Donc la solution est 0 .

b. *Je repère que la fonction n'est pas de signe constant : il faut donc séparer en deux intervalles, un intervalle de positivité et un intervalle de négativité.*

- La fonction f est positive sur $[-2 ; 0]$
  donc l'aire en u.a. entre les bornes -2 et 0 est égale à l'intégrale $\int_{-2}^{0} f(x).\mathrm{d}x$.

  La fonction f est négative sur $[0 ; 1]$
  donc l'aire en u.a. entre les bornes 0 et 1 est égale à $-\int_{0}^{1} f(x).\mathrm{d}x$. *→ La fonction est __négative__ donc __l'aire est l'opposé de l'intégrale__.*

- $x \mapsto 1 - e^{\frac{x}{2}} = 1 - 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$ est de la forme $1 - 2\,u'\,e^u$ avec $u(x) = \frac{x}{2}$,
  donc, une primitive de f est $x \mapsto x - 2\,e^{\frac{x}{2}}$.

Donc $\int_{-2}^{0} f(x).\mathrm{d}x = \left[x - 2\,e^{\frac{x}{2}} \right]_{-2}^{0}$

$= 0 - 2\,e^{\frac{0}{2}} - (-2 - 2\,e^{\frac{-2}{2}})$

$= -2 + 2 + \frac{2}{e}$

$= \frac{2}{e}$

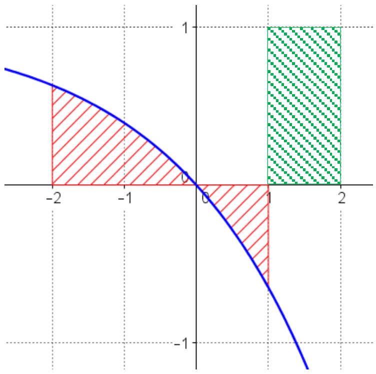
et $-\int_{0}^{1} f(x).\mathrm{d}x = -\left[x - 2\,e^{\frac{x}{2}} \right]_{0}^{1}$

$= -\left(1 - 2\,e^{\frac{1}{2}} - (0 - 2\,e^{\frac{0}{2}}) \right)$

$= -1 + 2\sqrt{e} - 2$

$= 2\sqrt{e} - 3$

donc l'aire en u.a. vaut $\frac{2}{e} + 2\sqrt{e} - 3$.



Le résultat environ égal à 1 unité d'aire est cohérent avec la figure.

---

5. *C'est une __aire entre deux courbes__.*
Nous devons calculer les bornes : elles correspondent aux points d'intersection des deux courbes.
Inutile de chercher à les lire sur le graphique… il faut les calculer en résolvant l'équation $f(x) = g(x)$.

- $f(x) = g(x)$

  $\Leftrightarrow\ -1{,}5x^2 + 10x - 2{,}5 = -2x^2 + 13x - 5$

  $\Leftrightarrow\ 0{,}5x^2 - 3x + 2{,}5 = 0$

  $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 0{,}5 \times 2{,}5 = 4 > 0$

  donc les deux bornes d'intégration sont $\frac{-(-3) + \sqrt{4}}{2 \times 0{,}5} = 5$ et $\frac{-(-3) - \sqrt{4}}{2 \times 0{,}5} = 1$.

Pour calculer l'aire entre deux courbes, nous devons calculer une intégrale de la différence entre f et g , mais cette différence doit être positive…
Nous devons d'abord savoir quelle est la fonction supérieure à l'autre sur $[1 ; 5]$.

- $f(x) - g(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 2{,}5$ est du signe de son coefficient directeur 0,5 positif à l'extérieur des racines 1 et 5.
  Donc, sur l'intervalle $[1 ; 5]$, on a $g(x) \geqslant f(x)$.

  donc l'aire en u.a. entre les deux courbes est égale à l'intégrale $\int_{1}^{5} (g(x) - f(x)).\mathrm{d}x = \int_{1}^{5} (-0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5).\mathrm{d}x$.

- Une primitive de $x \mapsto -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$ est $x \mapsto -0{,}5\,\frac{1}{3}x^3 + 3\,\frac{1}{2}x^2 - 2{,}5x$.

  Donc $\int_{1}^{5} (g(x) - f(x)).\mathrm{d}x = \left[-0{,}5\,\frac{1}{3}x^3 + 3\,\frac{1}{2}x^2 - 2{,}5x \right]_{1}^{5}$

  $= -0{,}5\,\frac{1}{3}5^3 + 3\,\frac{1}{2}5^2 - 2{,}5 \times 5 - \left(-0{,}5\,\frac{1}{3}1^3 + 3\,\frac{1}{2}1^2 - 2{,}5 \times 1\right)$

  $= \frac{16}{3}$

  donc l'aire en u.a. vaut $\frac{16}{3}$.

⑤ **1.** La fonction à intégrer est $x \mapsto x\,e^x$ et elle n'est d'aucune forme usuelle connue pour en trouver une primitive.
Puisqu'il faut utiliser une **intégration par parties**, vous devez trouver dans le produit $x\,e^x$ qui va jouer le rôle de $u(x)$ qui va jouer le rôle de $v'(x)$.
Pour choisir $u(x)$, il n'y a pas de risque de se tromper car vous saurez toujours trouver $u'(x)$. Vous savez tout dériver...
C'est donc le choix de $v'(x)$ qui est primordial car vous devez savoir en trouver le $v(x)$, c'est-à-dire trouver une primitive.
Et ça, vous ne savez pas toujours faire !

- Pouvez-vous choisir x pour $v'(x)$? Oui car avec $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$, vous avez trouvé une primitive facilement.
- Pouvez-vous choisir e^x pour $v'(x)$? Oui car avec $v(x) = e^x$, vous avez trouvé une primitive tout aussi facilement.

Nous avons donc deux possibilités...
Avec l'entraînement, vous saurez repérer la bonne.

1ère possibilité :

$x \mapsto x\,e^x$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(x) = e^x \text{ et } u'(x) = e^x \\ v'(x) = x \text{ et } v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_{-1}^{1} x\,e^x\,.\,dx = \left[e^x \times \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\,e^x\,.\,dx$$

$$\int v'\,u \quad = \quad [\,u\,v\,] \quad - \int v\,u'$$

Nous nous retrouvons à devoir calculer :
$\left[e^x \times \dfrac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1}$ qui ne pose aucun problème,
et une nouvelle intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\,e^x\,.\,dx$ qui n'est pas calculable...

NOUS AVONS CHOISI LA MAUVAISE POSSIBILITÉ !

2ème possibilité :

$x \mapsto x\,e^x$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x \text{ et } v(x) = e^x \end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_{-1}^{1} x\,e^x\,.\,dx = \left[x\,e^x \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1\,e^x\,.\,dx$$

$$\int u\,v' \quad = \quad [\,u\,v\,] \quad - \int u'\,v$$

La nouvelle intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^x\,.\,dx$ est parfaitement calculable !

C'EST LE BON CHOIX...

Attention, ne pensez pas que c'est la même fonction au départ et dans les crochets... L'une est uv' et l'autre est uv.
Ici, on dirait bien que c'est la même mais c'est parce que la primitive choisie pour $x \mapsto e^x$ est elle-même !

$$= 1\,e^1 - (-1)\,e^{-1} - [\,e^x\,]_{-1}^{1}$$
$$= e + \frac{1}{e} - (e^1 - e^{-1})$$
$$= e + \frac{1}{e} - e + \frac{1}{e}$$
$$= \frac{2}{e}$$

La primitive est immédiate, je me permets de ne pas la rédiger pour ne pas couper le calcul.

---

2. Nous ne montrerons plus les possibilités qui débouchent sur une nouvelle intégrale impossible à calculer.

$x \mapsto (2x-1)\,e^x$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x-1 \text{ et } u'(x) = 2 \\ v'(x) = e^x \text{ et } v(x) = e^x \end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\ln 2} (2x-1)\,e^x\,.\,dx = \left[(2x-1)\,e^x \right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} 2\,e^x\,.\,dx$$

→ Je vérifie que la nouvelle intégrale est calculable.

Là encore, on dirait bien que c'est la même fonction au départ et dans les crochets... Pour la même raison qu'au **1.** .

$$= (2\times\ln 2 - 1)\,e^{\ln 2} - (2\times 0 - 1)\,e^0 - \left[2\,e^x \right]_0^{\ln 2}$$
$$= 4\ln 2 - 1 - (2\,e^{\ln 2} - 2\,e^0)$$
$$= 4\ln 2 - 3$$

---

3. $t \mapsto (t+1)\,e^{t+1}$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(t) = t+1 \text{ et } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{t+1} \text{ et } v(t) = e^{t+1} \end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 (t+1)\,e^{t+1}\,.\,dt = \left[(t+1)\,e^{t+1} \right]_0^1 - \int_0^1 1\,e^{t+1}\,.\,dt$$

→ Je vérifie que la nouvelle intégrale est calculable.

$$= (1+1)\,e^{1+1} - (0+1)\,e^{0+1} - \left[e^{t+1} \right]_0^1$$
$$= 2\,e^2 - e - (e^2 - e)$$
$$= e^2$$

Observez cette manière astucieuse d'attendre pour calculer l'expression entre crochets :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (t+1)\,e^{t+1}.\,dt &= [\,(t+1)\,e^{t+1}\,]_0^1 - \int_0^1 1\,e^{t+1}.\,dt\\ &= [\,(t+1)\,e^{t+1}\,]_0^1 - [\,e^{t+1}\,]_0^1 && \rightarrow \text{J'attends la deuxième expression entre crochets.}\\ &= [\,(t+1)\,e^{t+1} - e^{t+1}\,]_0^1 && \rightarrow \text{Je les réunis...}\\ &= [\,t\,e^{t+1}\,]_0^1 && \rightarrow \text{... et j'obtiens une expression bien plus simple à calculer.}\\ &= 1\,e^{1+1} - 0\,e^{0+1}\\ &= e^2\end{aligned}$$

Après ces trois exemples, vous aurez compris que la fonction exponentielle jouera quasiment toujours le rôle de $v'(x)$.
Elle ne se complique pas quand on passe à une primitive.
Et elle permet au contraire à l'autre facteur de se simplifier par dérivation.

---

4. Ah, il n'y a plus d'exponentielle... Mais il y a du logarithme népérien.
Le choix n'est pas bien compliqué puisque vous ne connaissez pas de primitive de $\ln$!

$t \mapsto t\ln t$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(t) = \ln t \text{ et } u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = t \text{ et } v(t) = \dfrac{t^2}{2}\end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^2 t\ln t.\,dt &= [\,\ln t \times \frac{t^2}{2}\,]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t}\times\frac{t^2}{2}.\,dt\\ &= \ln 2 \times \frac{2^2}{2} - (\ln 1 \times \frac{1^2}{2}) - \int_1^2 \frac{t}{2}.\,dt\\ &= 2\ln 2 - [\,\frac{1}{2}\frac{t^2}{2}\,]_1^2\\ &= 2\ln 2 - (\frac{1}{2}\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{1^2}{2})\\ &= 2\ln 2 - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Je vérifie que la <u>nouvelle intégrale</u> est calculable : $\frac{1}{t}\times\frac{t^2}{2}$ va devenir un sympathique $\frac{t}{2}$.

---

⑥ Il s'agit de trouver des primitives de fonctions qui ne sont pas d'une forme connue.
On utilise la forme intégrale :

La deuxième borne est la variable x .

1. La fonction $x \mapsto \int_0^x t\,e^t.\,dt$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Je change de variable car x est une borne.

Je choisis la première borne que je veux dans $\mathbb{R}$.

J'écris l'expression de la fonction dont je cherche une primitive.

Évidemment, on ne va pas s'arrêter là... Il faut trouver une expression de cette intégrale en fonction de x .
C'est comme un <u>calcul d'intégrale</u> mais avec une borne numérique et une borne littérale.
Il est inutile de vouloir la calculer avec une primitive de $t \mapsto t\,e^t$ puisque nous n'en connaissons pas ! C'est justement ce que nous cherchons !
Il ne nous reste donc qu'à utiliser une <u>**intégration par parties**</u>...

La fonction à intégrer est la même que dans l'exercice ⑤ **1.** .

$t \mapsto t\,e^t$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(t) = t \text{ et } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^t \text{ et } v(t) = e^t\end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^x t\,e^t.\,dt &= [\,t\,e^t\,]_0^x - \int_0^x 1\,e^t.\,dt\\ &= x\,e^x - 0\,e^0 - [\,e^t\,]_0^x\\ &= x\,e^x - (e^x - e^0)\\ &= x\,e^x - e^x + 1\,.\end{aligned}$$

Donc, la fonction $x \mapsto x\,e^x - e^x + 1$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Remarquons qu'on aurait pu éliminer la constante et répondre avec $x \mapsto x\,e^x - e^x$ qui est une autre primitive.

Et remarquons qu'une autre borne constante aurait donné une autre primitive.

Par exemple : $\int_2^x t\,e^t.\,dt = [\,t\,e^t\,]_2^x - \int_2^x 1\,e^t.\,dt$
$= x\,e^x - 2\,e^2 - [\,e^t\,]_2^x$
$= x\,e^x - 2\,e^2 - (e^x - e^2)$
$= x\,e^x - e^x - 2\,e^2 + e$

On obtient la même expression mais avec la constante $-2\,e^2 + e$.
Essayez avec la borne 1 .

---

2. **a.** $t \mapsto \ln t$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(t) = \ln t \text{ et } u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = 1 \text{ et } v(t) = t \end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^{e} \ln t \,.\, dt &= [\, t \ln t \,]_1^{e} - \int_1^{e} \frac{1}{t}\, t \,.\, dt \\ &= e \ln e - 1 \ln 1 - [\, t \,]_1^{e} \\ &= e - (\, e - 1\,) \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

→ On a été un peu vite ici en remarquant que $\int_1^{e} \frac{1}{t}\, t \,.\, dt$ est égal à $\int_1^{e} 1 \,.\, dt$.

b. La fonction $x \mapsto \int_1^{x} \ln t \,.\, dt$ est une primitive de $\ln$ sur $]\,0\,;+\infty[$.

On a la même intégrale à calculer que dans le **a.** avec x à la place de e .

Il est inutile de détailler :

Comme dans le **a.** :

$$\begin{aligned} \int_1^{x} \ln t \,.\, dt &= [\, t \ln t \,]_1^{x} - \int_1^{x} \frac{1}{t}\, t \,.\, dt \\ &= x \ln x - 1 \ln 1 - [\, t \,]_1^{x} \\ &= x \ln x - (\, x - 1\,) \\ &= x \ln x - x + 1\,. \end{aligned}$$

Donc, la fonction $x \mapsto x \ln x - x + 1$ est une primitive de $\ln$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Retenez que $x \mapsto x \ln x - x$ est la primitive usuelle de $\ln$.

Profitons-en pour signaler une <u>méthode experte</u> pour trouver l'expression sans constante inutile.

Elle repose sur la technique vue dans le ⑤ **3.** qui consiste à attendre que le deuxième crochet soit prêt :

$$\begin{aligned} \int_a^{b} \ln x \,.\, dx &= [\, x \ln x \,]_a^{b} - \int_a^{b} \frac{1}{x}\, x \,.\, dx \\ &= [\, x \ln x \,]_a^{b} - [\, x \,]_a^{b} \\ &= [\, x \ln x - x \,]_a^{b} \end{aligned}$$

Donc, la fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

---

3. La fonction $x \mapsto \int_0^{x} t^2\, e^{t} \,.\, dt$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2\, e^{x}$.

$t \mapsto t^2\, e^{t}$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(t) = t^2 \text{ et } u'(t) = 2t \\ v'(t) = e^{t} \text{ et } v(t) = e^{t} \end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{x} t^2\, e^{t} \,.\, dt = [\, t^2\, e^{t} \,]_0^{x} - \int_0^{x} 2t\, e^{t} \,.\, dt$$

→ La nouvelle intégrale demande une deuxième intégration par parties.

De plus, $t \mapsto 2t\, e^{t}$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(t) = 2t \text{ et } u'(t) = 2 \\ v'(t) = e^{t} \text{ et } v(t) = e^{t} \end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{x} 2t\, e^{t} \,.\, dt &= [\, 2t\, e^{t} \,]_0^{x} - \int_0^{x} 2\, e^{t} \,.\, dt \\ &= [\, 2t\, e^{t} \,]_0^{x} - [\, 2\, e^{t} \,]_0^{x} \\ &= [\, 2t\, e^{t} - 2\, e^{t} \,]_0^{x} \end{aligned}$$

→ Expression de la nouvelle intégrale...

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^{x} t^2\, e^{t} \,.\, dt &= [\, t^2\, e^{t} \,]_0^{x} - [\, 2t\, e^{t} - 2\, e^{t} \,]_0^{x} \\ &= [\, t^2\, e^{t} - 2t\, e^{t} + 2\, e^{t} \,]_0^{x} \\ &= [\, (\, t^2 - 2t + 2\,)\, e^{t} \,]_0^{x} \\ &= (\, x^2 - 2x + 2\,)\, e^{x} - (\, 0^2 - 2 \times 0 + 2\,)\, e^{0} \\ &= (\, x^2 - 2x + 2\,)\, e^{x} - 2\,. \end{aligned}$$

→ ... qui vient la remplacer.

→ Attention au changement de signe.

→ On peut factoriser.

Donc, la fonction $x \mapsto (\, x^2 - 2x + 2\,)\, e^{x} - 2$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2\, e^{x}$ sur $\mathbb{R}$.

⑦ **1.** $x \mapsto x\sqrt{x}$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \text{ et } u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = x \text{ et } v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} J &= \left[\sqrt{x}\,\frac{x^2}{2} \right]_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{x^2}{2}\,.\,dx \\ &= \sqrt{4}\,\frac{4^2}{2} - \sqrt{0}\,\frac{0^2}{2} - \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,.\,dx \\ &= 16 - \frac{1}{4}\int_0^4 x\sqrt{x}\,.\,dx \\ &= 16 - \frac{1}{4}J \end{aligned}$$

→ En effet : $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}} = \dfrac{x\,x}{\sqrt{x}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{x}\,x}{\cancel{\sqrt{x}}} = x\sqrt{x}$.

2. $J = 16 - \dfrac{1}{4}J$

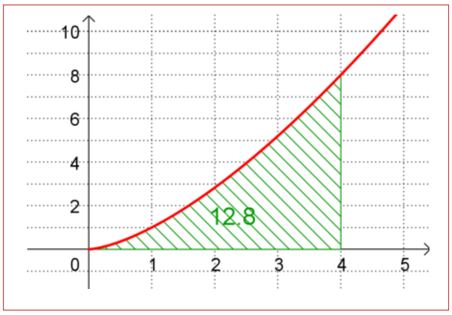
$\Leftrightarrow J + \dfrac{1}{4}J = 16$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{4}J = 16$

$\Leftrightarrow J = 16 \times \dfrac{4}{5}$

$\Leftrightarrow J = 12{,}8$

3. La fonction $x \mapsto x\sqrt{x}$ est positive sur l'intervalle $[\,0\,;4\,]$
donc J est l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de $x \mapsto x\sqrt{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.



⑧ **1.**

- Limite en $+\infty$:

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (\,x+1\,) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \end{cases}$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- Limite en $-\infty$: Le brouillon montre un **produit indéterminé** $(-\infty)\times(0)$.

$(\,x+1\,)\,e^{2x} = x\,e^{2x} + e^{2x} = \dfrac{1}{2}2x\,e^{2x} + e^{2x}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} X\,e^{X} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x\,e^{2x} = 0$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, on en déduit par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2.

- f est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = x+1 \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{2x} \text{ et } v'(x) = 2\,e^{2x} \end{cases}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$
donc $f'(x) = 1\,e^{2x} + (\,x+1\,)\,2\,e^{2x}$
$= (\,1 + 2x + 2\,)\,e^{2x}$
$= (\,2x + 3\,)\,e^{2x}$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x+3$.

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
signes de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	0	↘	$-\dfrac{1}{2}e^{\frac{4}{3}}$	↗	$+\infty$

$f(-\dfrac{3}{2}) = (-\dfrac{3}{2} + 1)\,e^{2\times\frac{2}{3}}$

$= -\dfrac{1}{2}e^{\frac{4}{3}}$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $x+1$

donc $f(x)$ est négatif sur $]-\infty\,;-1\,]$ et positif sur $[\,-1\,;+\infty\,[$.

3. **a.** On voit bien qu'il va y avoir un lien entre cette aire et une intégrale.
Mais on se souvient que le signe de la fonction joue un rôle essentiel...
Ici, le domaine se trouve à gauche de -1 et donc sur une zone où la fonction est négative !
Donc, l'aire sera l'opposée de l'intégrale.

$f(x)$ est négatif sur $]-\infty\,;-1]$

donc, l'aire $D(\alpha)$ du domaine $\mathscr{D}$ est égale à $-\int_{\alpha}^{-1}(x+1)\,\mathrm{e}^{2x}\,.\,\mathrm{d}x$.

Il reste donc à calculer l'intégrale avec, comme c'est indiqué, une intégration par parties.

$x \mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{2x}$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(x)=x+1 \text{ et } u'(x)=1 \\ v'(x)=\mathrm{e}^{2x} \text{ et } v(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{-1}(x+1)\,\mathrm{e}^{2x}\,.\,\mathrm{d}x &= \left[(x+1)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{\alpha}^{-1} - \int_{\alpha}^{-1} 1\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,.\,\mathrm{d}x \\
&= (-1+1)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times(-1)} - (\alpha+1)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\alpha} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{\alpha}^{-1} \\
&= -\frac{1}{2}(\alpha+1)\,\mathrm{e}^{2\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times(-1)} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\alpha}\right) \\
&= -\frac{1}{2}(\alpha+1)\,\mathrm{e}^{2\alpha} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\alpha} \\
&= \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2\alpha} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2}
\end{aligned}$$

→ On s'occupera du $-$ après, à condition de ne pas l'oublier !

On en déduit que $D(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2\alpha} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2}$, en u.a. .

b. Le brouillon montre encore un **produit indéterminé** $(-\infty)\times(0)$ pour l'expression $\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2\alpha}$.

Même technique que dans le **1.** .

$$\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2\alpha} = \frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{2\alpha} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\alpha} = \frac{1}{4}2\alpha\,\mathrm{e}^{2\alpha} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\alpha}$$

$\begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to-\infty} 2\alpha = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} X\,\mathrm{e}^{X} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} 2\alpha\,\mathrm{e}^{2\alpha} = 0$

Comme $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} \mathrm{e}^{2\alpha} = 0$, on en déduit par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} D(\alpha) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2}$, en u.a. .

---

⑨ **1.**

- $I_0 = \int_0^1 x^0\,\mathrm{e}^{-x}\,.\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,.\,\mathrm{d}x$
$$\begin{aligned} &= \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{0} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

- $I_1 = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,.\,\mathrm{d}x$

$x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(x)=x \text{ et } u'(x)=1 \\ v'(x)=\mathrm{e}^{-x} \text{ et } v(x)=-\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[x(-\mathrm{e}^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 1(-\mathrm{e}^{-x})\,.\,\mathrm{d}x \\
&= 1(-\mathrm{e}^{-1}) - 0(-\mathrm{e}^{-0}) + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,.\,\mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{e}^{-1} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 \\
&= -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-0} \\
&= 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\,.\,\mathrm{d}x$.

$x \mapsto x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}$ est de la forme $u\,v'$ avec $\begin{cases} u(x)=x^{n+1} \text{ et } u'(x)=(n+1)\,x^{n} \\ v'(x)=\mathrm{e}^{-x} \text{ et } v(x)=-\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \left[x^{n+1}(-\mathrm{e}^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\,x^{n}(-\mathrm{e}^{-x})\,.\,\mathrm{d}x \\
&= 1^{n+1}(-\mathrm{e}^{-1}) - 0^{n+1}(-\mathrm{e}^{-0}) + (n+1)\int_0^1 x^{n}\,\mathrm{e}^{-x}\,.\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)\,I_n
\end{aligned}$$

3. ◆ $I_2 = -\frac{1}{e} + (1+1)\,I_1$

$= -\frac{1}{e} + 2\,(1 - \frac{2}{e})$

$= 2 - \frac{5}{e}$

Et on en déduit :

$I_3 = -\frac{1}{e} + (2+1)\,I_2$

$= -\frac{1}{e} + 3\,(2 - \frac{5}{e})$

$= 6 - \frac{16}{e}$

◆ $I_4 = -\frac{1}{e} + (3+1)\,I_3$

$= -\frac{1}{e} + 4\,(6 - \frac{16}{e})$

$= 24 - \frac{65}{e}$

---

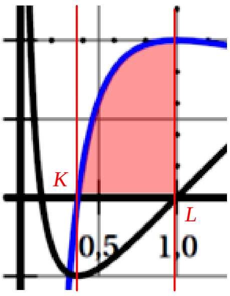
⑪ **1.** On sait que $\begin{cases} \text{la fonction } F \text{ est croissante} \Leftrightarrow \text{sa dérivée } f \text{ est positive} \\ \text{la fonction } F \text{ est décroissante} \Leftrightarrow \text{sa dérivée } f \text{ est négative.} \end{cases}$

Dans la situation 1, F est décroissante sur $]\,0\,;1{,}5\,]$ (le 1,5 n'est pas très précis) mais sa dérivée f n'est pas toujours négative sur $]\,0\,;1{,}5\,]$.

Dans la situation 3, $\begin{cases} F \text{ est croissante sur }]\,0\,;1\,] \text{ mais sa dérivée } f \text{ n'est pas toujours positive sur }]\,0\,;1\,] \\ \text{et } F \text{ est décroissante sur } [\,1\,;+\infty\,[\text{ mais sa dérivée } f \text{ n'est pas négative sur } [\,1\,;+\infty\,[\,. \end{cases}$

C'est donc la situation 2 qui convient.

2. **a.** Il faut bien comprendre de quelle aire il s'agit :



Premier problème : trouver les deux bornes.

Commençons par l'abscisse de K :

◆ $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\,(1 + \ln x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 + \ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = -1$

$\Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{-1}$

$\Leftrightarrow x = e^{-1}$

Donc K a pour abscisse e^{-1}.

Puis déterminons l'abscisse de L.

◆ L'abscisse de L est l'abscisse où $f(x)$ atteint son maximum, c'est-à-dire où sa dérivée s'annule.

f est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{x} \text{ et } u'(x) = \frac{-1}{x^2} \\ v(x) = 1 + \ln x \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$

donc $f'(x) = \frac{-1}{x^2}\,(1 + \ln x) + \frac{1}{x}\frac{1}{x}$

$= \frac{-1}{x^2}\,(1 + \ln x) + \frac{1}{x^2}$

$= \frac{1}{x^2}\,(1 - 1 - \ln x)$

$= \frac{-\ln x}{x^2}$

Alors :

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-\ln x}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

Donc L a pour abscisse 1. → *On s'en doutait en peu...*

Il faut maintenant vérifier le signe de f pour être sûr que l'aire va se calculer avec l'intégrale :

- $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$ est du signe de $-\ln x$ donc positive sur $]\,0\,;1\,]$

  donc f est croissante sur $]\,0\,;1\,]$.

  Comme f s'annule en $x = e^{-1}$, elle est positive sur $[\,e^{-1}\,;1\,]$

  donc l'aire du domaine est égale à $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{x}(1+\ln x)\,.\,dx$.

  À la calculatrice, on trouve que cette aire vaut environ 0,5 u.a. .

b. $\dfrac{1}{x}(1+\ln x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\ln x$.

D'une part, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ln x$.

D'autre part, $x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln x$, de la forme $u'u$ avec $u(x) = \ln x$, a pour primitive $\dfrac{u^2}{2} : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$.

On en déduit : $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{x}(1+\ln x)\,.\,dx = \left[\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{e^{-1}}^{1}$

$$= \ln 1 + \frac{(\ln 1)^2}{2} - \ln e^{-1} - \frac{(\ln e^{-1})^2}{2}$$

$$= -(-1) - \frac{(-1)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Don, l'aire vaut exactement 0,5 u.a. .