Savoir ÉTUDIER UNE FONCTION COMPOSÉE

Ce que je dois savoir faire

- **Repérer une fonction composée**
  - Quelle est la 1$^{\text{ère}}$ fonction u qui agit sur x, puis quelle est la 2$^{\text{ème}}$ fonction v qui agit sur $u(x)$?

$$x \mapsto u(x) \mapsto v(\, u(x)\,) \text{ ?}$$

  - Trois cas se présenteront en début d'année :

    $x \mapsto u(x) \mapsto \sqrt{u(x)}$: la 1$^{\text{ère}}$ fonction est une fonction usuelle u, la 2$^{\text{ème}}$ est la fonction racine carrée,

    $x \mapsto u(x) \mapsto (\, u(x)\,)^n$: la 1$^{\text{ère}}$ fonction est une fonction usuelle u, la 2$^{\text{ème}}$ est une fonction puissance,

    $x \mapsto u(x) \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$: la 1$^{\text{ère}}$ fonction est une fonction usuelle u, la 2$^{\text{ème}}$ est la fonction exponentielle.

    et d'autres cas seront vus par la suite.

- **Calculer une limite de fonction composée**
  - Voir fiche *F2 - Déterminer la limite d'une fonction.*

- **Calculer la dérivée d'une fonction composée**
  - Appliquer les nouvelles dérivées aux fonctions usuelles :

    - Fonction usuelle u sous une racine carrée : $\boldsymbol{(\sqrt{u}\,)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$

      donc si l'expression de la fonction est $f(x) = \sqrt{u(x)}$, alors l'expression de la dérivée est $f\,'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

    - Fonction usuelle u à une puissance : $\boldsymbol{(\,u^n\,)' = n\, u'\, u^{n-1}}$

      donc si $f(x) = (\,u(x)\,)^n$, alors $f\,'(x) = n\, u'(x)\,(\,u(x)\,)^{n-1}$.

      Remarque : La formule reste vraie pour n entier négatif, ce qui permet de traiter $\dfrac{1}{u^n}$ comme u^{-n} .

    - Fonction usuelle u en exponentielle : $\boldsymbol{(\,\mathrm{e}^u\,)' = u'\,\mathrm{e}^u}$

      donc si $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, alors $f\,'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.

  - Attention au domaine de dérivabilité...

    - Les fonctions puissances et $\exp$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc u^n et e^u sont dérivables là où u est dérivable.
    - Mais la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 (souvenez-vous de la tangente verticale à l'origine), donc $\sqrt{u}$ est dérivable là où u est dérivable et non nulle.

- **Établir le tableau de variations**

  Les techniques sont les mêmes qu'en Première.

  1) Factoriser la dérivée.

  2) Étudier ses signes avec l'inéquation $f\,'(x) \geqslant 0$, qui donne $\left\{\begin{array}{l}\text{les annulations,}\\ \text{les intervalles de positivité,}\\ \text{et donc, } \textit{a contrario}\text{, les intervalles de négativité.}\end{array}\right.$

     - Tous les facteurs $\sqrt{\ldots}$ et $(\ldots)^2$ sont toujours positifs (mais peuvent s'annuler s'ils sont en numérateur).
       Tous les facteurs $\mathrm{e}^{\cdots}$ sont toujours strictement positifs.
       Précisez-le et écrivez que ça vous permet de n'étudier que le signe du reste.
     - Les inéquations $f\,'(x) \geqslant 0$ se ramènent souvent à $\mathrm{e}^{u(x)} \geqslant 1 \iff u(x) \geqslant 0$
       ou à $\mathrm{e}^{u(x)} \geqslant \mathrm{e} \iff u(x) \geqslant 1$.

  3) Faire le tableau avec légendes...

x	
signes de $f\,'(x)$	
variations de f	

  4) Placer les limites aux bornes calculées précédemment.

  5) Calculer les valeurs particulières (et montrer les calculs à côté du tableau).

Ce que je dois aussi savoir faire

- **Déduire une asymptote d'une limite**

  - $\begin{cases} \text{Les asymptotes "horizontales" d'équations } y = \ell \text{ quand } \lim\limits_{x \to \ldots\infty} f(x) = \ell \\ \text{Les asymptotes "verticales" d'équations } x = \ell \text{ quand } \lim\limits_{x \to \ell} f(x) = \ldots\infty \end{cases}$

- **Déterminer une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse a**

  1) Calculer d'abord $f(a)$ et $f'(a)$.
  2) Puis, appliquer la formule $y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$ et la simplifier (avec des $\Leftrightarrow$).

- **Étudier des positions relatives de deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$**

  1) On fait une étude de signes de $f(x) - g(x)$.
  2) Sur les intervalles où $f(x) - g(x)$ est positif, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.
     Sur les intervalles où $f(x) - g(x)$ est négatif, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathscr{C}_g$.

  Remarque : La deuxième courbe est souvent une tangente.
  On prend alors pour $g(x)$ l'expression simplifiée de $f'(a)\,(x - a) + f(a)$.

Ce que je dois aussi me rappeler

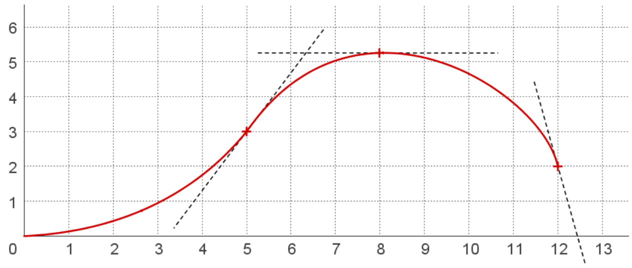
- **Traduire une information graphique**

  - Si l'énoncé dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A\,(x_A\,;y_A)$, alors $f(x_A) = y_A$.
  - Si l'énoncé dit que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A\,(x_A\,;y_A)$ passe par le point $B\,(x_B\,;y_B)$, alors $f'(x_A) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

- **Modéliser une vitesse instantanée en a par le nombre dérivée en a**

  - Si la variable est le temps t et la fonction mesure l'évolution d'une grandeur (taille, concentration, ...),
    alors la vitesse instantanée d'évolution à l'instant $t = a$ est le nombre dérivé $f'(a)$,
    c'est-à-dire le coefficient directeur de tangente en $(a\,;f(a))$.

  - Par lecture graphique, on peut alors trouver quand la vitesse instantanée est nulle, maximale, minimale.

    Par exemple ci-contre :
    - la vitesse est nulle en $t = 8$
      car la tangente est "horizontale",
    - la vitesse est positive sur $[0\,;8]$
      car les tangentes sont "montantes",
    - la vitesse est négative sur $[8\,;12]$
      car les tangentes sont "descendantes",
    - la vitesse est maximale en $t = 5$ (environ) car c'est là que la tangente "monte le plus",
    - la vitesse est minimale en $t = 12$ car c'est là que la tangente "descend le plus".

    Ces deux notions seront vues en détail plus tard.

Remarques sur les exercices

- L'exercice ① rassemble des calculs de dérivées de fonctions composées.
  On attend une rédaction soignée.
- L'exercice ② est une série de cinq études de fonctions où intervient la forme e^{u} .
- L'exercice ③ utilise des lectures graphiques pour déterminer des valeurs de paramètres.
- L'exercice ④ est un extrait d'un *vrai-faux* un peu délicat posé au bac.
- Les exercices ⑤ à ⑦ sont des types bac sur des situations concrètes modélisées.
  Le ⑦ commence par une étude de suite et fait intervenir des programmes en *Python*.
- Les exercices ⑧ et ⑨ travaillent sur la racine carrée et peuvent être techniques.
- Les exercices ⑩ et ⑪ proposent des suites de fonctions f_n dépendant d'un paramètre entier naturel n .
  Ils demandent un certain recul sur les objets manipulés.

Et toujours le même conseil...

Tracez votre courbe à la calculatrice avant de commencer, vous y trouverez quasiment toutes les réponses.

① Calculer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. f définie sur $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+2x}$.
2. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2 - x^2)^5$.
3. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{3x-1}$.
4. F définie sur $[5 ; +\infty[$ par $F(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$.
5. G définie sur $]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ par $G(x) = \dfrac{1}{(6-2x)^3}$.
6. H définie sur $[0 ; +\infty[$ par $H(x) = e^{\sqrt{x}}$.
7. φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \sqrt{e^x}$
8. ψ définie sur $[0 ; +\infty[$ par $\psi(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$.

---

② Les exercices **1.** à **5.** sont indépendants.

1. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{2x+1}$.

a. Calculer les limites aux bornes.

b. Calculer l'expression de la dérivée.

c. Établir le tableau de variations.

2. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = e^{2-x}$.

a. Établir le tableau de variations avec limites de la fonction f .

b. Montrer que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 passe par le point $A(2 ; 0)$.

3. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par $g(x) = x\,e^{x+1}$.

a. Établir le tableau de variations avec limites de la fonction g .

b. Soit (Δ) la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 .
Étudier les positions relatives de (Δ) et de la courbe de g .

4. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction F par $F(x) = x\,e^{1-x}$.
Établir le tableau de variations avec limites de la fonction F .

5. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction G par $G(x) = e^{x^2}$.
Établir le tableau de variations avec limites de la fonction G .

---

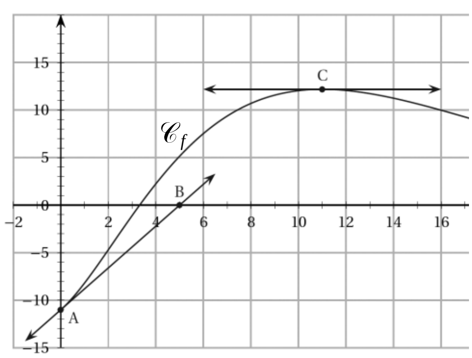
③ Les exercices **1.** à **5.** sont indépendants.

1. Dans le repère orthogonal donné ci-contre, $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $(0 ; -11)$ passe par le point $B(5 ; 0)$ et la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point C d'abscisse 11 est parallèle à l'axe des abscisses.

a. Lire graphiquement les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(11)$.

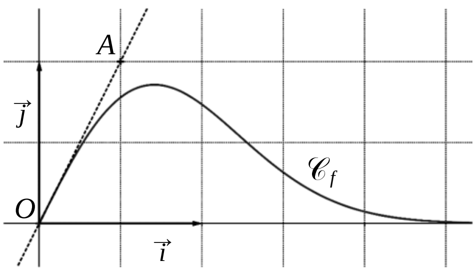
b. f est définie par $f(x) = (x^2 + a)\,e^{bx}$, où a et b sont des réels.
Déterminer les valeurs de a et de b .

c. En déduire l'ordonnée de C .
On donnera la valeur exacte et l'arrondi à 10^{-2}.



D'après Baccalauréat ES Amérique du Nord 2019

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ donnée ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction f définie sur $[0 ; +\infty [$.
On considère le point $A (0,5 ; 1)$.
On sait que O appartient à $\mathscr{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O.



a. On suppose que la fonction f est définie par une expression de la forme $f(x) = (ax + b)\, e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.
Déterminer les valeurs exactes des réels a et b, en détaillant la démarche.

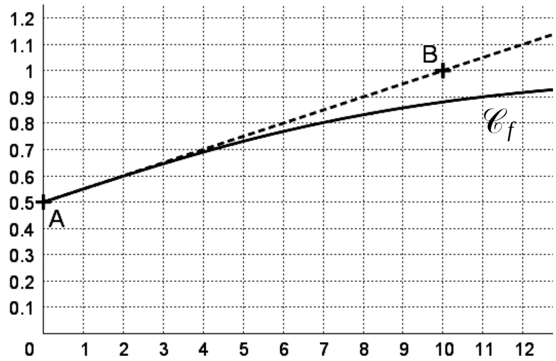
Désormais, on considère que $f(x) = 2x\, e^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty [$.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

c. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[0 ; +\infty [$.

D'après Baccalauréat S Amérique du Sud 2016

3. Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0 ; +\infty [$ par $f(x) = \dfrac{a}{1 + e^{-bx}}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-contre.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A (0 ; 0,5)$ et la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point $B (10 ; 1)$.



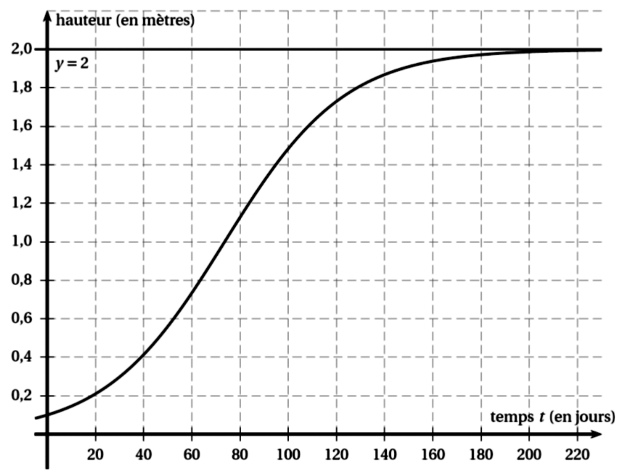
a. Justifier que $a = 1$.

b. Vérifier que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{b\, e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$.

c. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

D'après Baccalauréat S Antilles 2019

4. On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.
Le graphique ci-contre représente cette évolution.
La hauteur est en mètres et le temps en jours.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type $h(t) = \dfrac{a}{1 + b\, e^{-0,04t}}$, où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.
On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

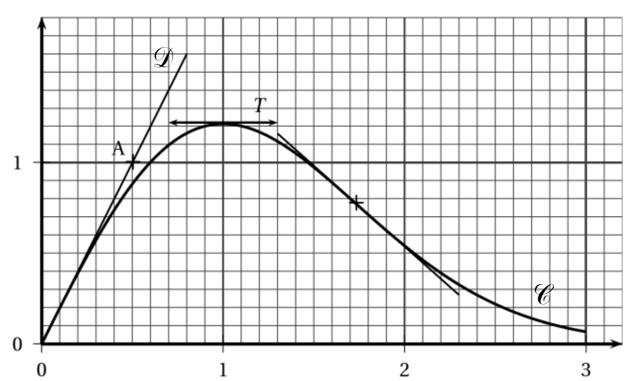


a. Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

b. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs.
Elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.
La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t.
En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci.
Estimer alors la hauteur du plant.

D'après Baccalauréat S Pondichéry 2013

5. On donne ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ à l'origine.
Elle passe par le point $A (0,5 ; 1)$.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.
La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 3]$ par $f(x) = ax\, e^{bx^2}$, où a et b sont des réels.



a. Montrer que $f'(x) = (a + 2abx^2)\, e^{bx^2}$.

b. Déterminer les valeurs de a et de b.

D'après Baccalauréat ES Antilles Septembre 2019

④ *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx+1}$.
Affirmation 1 : Pour tout entier naturel $n > 1$, la fonction f_n admet un maximum.

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Affirmation 2 : La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.

D'après Baccalauréat S Métropole 2019

---

⑤ La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.
Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à 2,5 µg/mL.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante : $f(t) = 3t\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2$ avec $t > 0$, où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en µg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. **a.** Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?

b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
Vérifier que, pour tout nombre réel t positif, $f'(t) = \dfrac{3}{4}(4-t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}$.

3. **a.** Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f .

b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

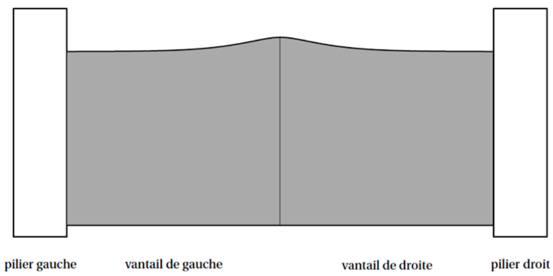
D'après Baccalauréat S Amérique du Sud 2019

---

⑥ On désire réaliser un portail comme représenté ci-contre.
Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[\,0\,;2\,]$ par $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x} + b$, où b est un nombre réel.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[\,0\,;2\,]$.



1. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\,0\,;2\,]$.

2. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[\,0\,;2\,]$.

3. Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

D'après Baccalauréat Amérique du Sud 2014

---

⑦ *Les parties* A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.
La température du four est exprimée en degré Celsius (° C).
La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 °C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Partie A

Pour un nombre entier naturel n , on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1\,000$.

La température T_n est calculée par l'algorithme suivant, en Python :

```
T = 1000
for i in range(1,n+1) :
    T = 0.82*T+3.6
```

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.

2. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n , on a $T_n = 980\times 0{,}82^{\,n} + 20$.

3. On veut savoir au bout de combien d'heures le four peut être ouvert sans risque pour les céramiques.
Recopier et compléter l'algorithme suivant en Python pour qu'il affiche ce nombre d'heures :

```
n = 0
T = 1000
while … :
    T = 0.82*T+3.6
    …
print(…)
```

Au bout de combien d'heures le four peut être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Partie B

Dans cette partie, on note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.
La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par $f(t) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + b$, où a et b sont deux nombres réels.

On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$.

1. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement, la température du four est de 1 000 °C, c'est-à-dire que $f(0) = 1\,000$.

2. Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif t : $f(t) = 980\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20$.

a. Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.

b. Étudier les variations de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

c. Interpréter les résultats des questions précédentes dans le contexte.

D'après Baccalauréat S Pondichéry 2018

---

⑧ On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto x - \sqrt{x^2+1}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}$.
En déduire les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote ?

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\,;0\,]$ puis sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. On pose (Δ) la tangente au point d'abscisse 0.

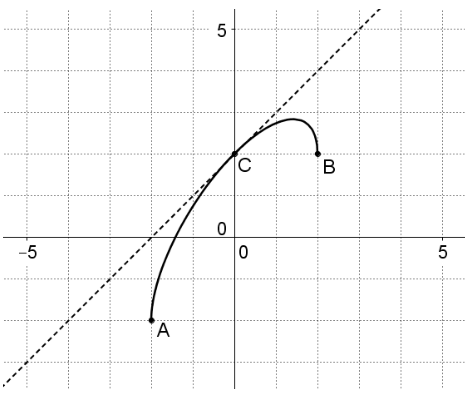
a. Déterminer une équation cartésienne de (Δ).

b. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de (Δ).

---

⑨ *Partie A*

On définit sur $[-2\,;2\,]$ la fonction f par $f(x) = \sqrt{4-x^2} + x$.
On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de cette fonction.



1. Par simple lecture graphique, conjecturer les équations des tangentes aux points $A(-2\,;-2)$, $B(2\,;2)$ et $C(0\,;2)$.

2. Montrer que, pour tout $x \in\,]-2\,;2\,[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}$.

3. Déterminer par le calcul l'équation cartésienne de la tangente au point C.

4. Résolution de l'équation $(E) : \sqrt{4-x^2} - x = 0$:

a. Montrer que, si x vérifie l'équation (E), alors $4 - x^2 = x^2$.

b. En déduire les deux seules valeurs qui peuvent être solutions.

c. Montrer que l'une de ces deux valeurs est solution et que l'autre ne l'est pas.

5. Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On définit sur $]-\infty\,;-2\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty\,[$ la fonction g par $g(x)=\sqrt{x^2-4}+x$.

On donne son tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
variations de g		↘		(zone grisée)		↗	

1. **a.** Calculer les limites de $\sqrt{x^2-4}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

d. La courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de g admet-elle des asymptotes ?

2. Cette question étudie la dérivabilité en 0 :

a. Montrer que, pour tout h positif, $\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}=1+\sqrt{\dfrac{4}{h}+1}$.

On utilisera que, pour tout $h>0$, $\sqrt{h^2}=h$.

b. Calculer $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}} \dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}$.

On admet que cette limite est égale à $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} \dfrac{g(-2+h)-g(-2)}{h}$.

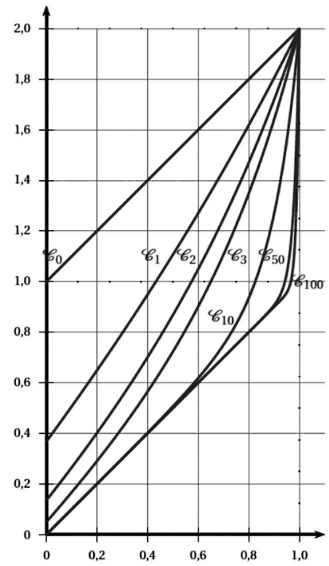
c. Conclure.

3. Calculer les valeurs exactes et les arrondis à 10^{-1} de $g(-4)$ et de $g(4)$.

4. Utiliser les résultats des questions précédentes pour donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur le graphique précédent.

---

⑩ Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ par $f_n(x)=x+e^{n(x-1)}$.
On note $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Quelques-unes des courbes $\mathscr{C}_n$ sont représentées ci-contre.



Partie A **: généralités sur les fonctions f_n**

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$.

2. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.

3. Pour tout entier naturel n, on note a_n le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_n$.
À l'aide des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (a_n).
Démontrer cette conjecture.

Partie B **: évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé**

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[\,0\,;1\,]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x=1$.
Étudier le comportement de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $x=0{,}5$.
Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $0\leqslant x<1$.
Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

D'après Baccalauréat S Asie 2015

⑪ Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x^2+1}\right)^n$.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$.

2. Démontrer que, pour tous les entiers $n \geqslant 1$, les courbes $\mathscr{C}_{f_n}$ représentatives des fonctions f_n passent par les points de coordonnées $(0\,;1)$, $\left(-\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ et $(2\,;1)$.

3. **a.** Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $f_n\,'(x)$.

b. En déduire que le tableau de variations de f_1 .

c. Montrer que, pour tous les entiers $n \geqslant 2$, les fonctions f_n ont les mêmes variations.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = f_n(1)$ et $v_n = f_n(3)$.
Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) .

5. Étudier les positions relatives des courbes des fonctions f_2 et f_3 .

6. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les courbes des fonctions f_1 , f_2 et f_3 .
Associer chacune des courbes $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$ à la bonne fonction.