Correction de **FONCTIONS - Fiche 2**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪

①

1. La fonction composée est $x \mapsto 1+2x \mapsto \sqrt{1+2x}$.
La $2^{\text{ème}}$ fonction est la fonction racine carrée.

f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 1+2x$ et $u'(x) = 2$ → Je montre la forme usuelle et la $1^{\text{ère}}$ fonction.

donc f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ → J'en déduis la dérivabilité (attention à $-\frac{1}{2}$ exclu car il annule $\sqrt{1+2x}$) et la formule.

donc $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{1+2x}}$ → ... puis l'expression.

$= \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

---

2. La fonction composée est $x \mapsto 2-x^2 \mapsto (2-x^2)^5$.
La $2^{\text{ème}}$ fonction est la fonction puissance 5.

h est de la forme u^5 avec $u(x) = 2-x^2$ et $u'(x) = -2x$
donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h' = 5\,u'\,u^{5-1}$
donc $h'(x) = 5\,(-2x)\,(2-x^2)^4$
$= -10x\,(2-x^2)^4$

---

3. La fonction composée est $x \mapsto 3x-1 \mapsto e^{3x-1}$.
La $2^{\text{ème}}$ fonction est la fonction exponentielle.

g est de la forme e^u avec $u(x) = 3x-1$ et $u'(x) = 3$
donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = u'\,e^u$
donc $g'(x) = 3\,e^{3x-1}$

---

4. La fonction composée est $x \mapsto x^2-3x-10 \mapsto \sqrt{x^2-3x-10}$.
La $2^{\text{ème}}$ fonction est la fonction racine carrée.

F est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2-3x-10$ et $u'(x) = 2x-3$

donc F est dérivable sur $]\,5\,;+\infty\,[$ et $F' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ → Non dérivable en 5 qui annule $\sqrt{x^2-3x-10}$.

donc $F'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-10}}$

---

5. Attention à éviter de chercher à utiliser $x \mapsto 6-2x \mapsto (6-2x)^3 \mapsto \dfrac{1}{(6-2x)^3}$, une composée de trois fonctions !

La fonction composée est $x \mapsto 6-2x \mapsto \dfrac{1}{(6-2x)^3}$ qu'on peut écrire $(6-2x)^{-3}$.
La $2^{\text{ème}}$ fonction est donc la fonction puissance -3.

G est de la forme u^{-3} avec $u(x) = 6-2x$ et $u'(x) = -2$
donc G est dérivable sur $]-\infty\,;3\,[\,\cup\,]\,3\,;+\infty\,[$ et $G' = -3\,u'\,u^{-3-1}$
donc $G'(x) = -3\times(-2)\,(6-2x)^{-3-1}$
$= 6\,(6-2x)^{-4}$
$= \dfrac{6}{(6-2x)^4}$

---

6. La fonction composée est $x \mapsto \sqrt{x} \mapsto e^{\sqrt{x}}$
La $2^{\text{ème}}$ fonction est la fonction exponentielle.

H est de la forme e^u avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

donc H est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $H' = u'\,e^u$ → Non dérivable en 0 qui annule $\sqrt{x}$.

donc $H'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}}$

---

7. La fonction composée est $x \mapsto e^x \mapsto \sqrt{e^x}$.
La $2^{\text{ème}}$ fonction est la fonction racine carrée.

φ est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = e^x$ et $u'(x) = e^x$

donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ → Dérivable sur $\mathbb{R}$ car e^x n'est jamais nul.

donc $\varphi'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}}$

> On remarque que $\varphi'(x)$ peut écrire $\frac{1}{2}\sqrt{e^x}$
> en simplifiant en haut et en bas par $\sqrt{e^x}$.
> Si on se souvient que la racine carrée est une puissance $1/2$, on a en effet :
> $\varphi(x) = (e^x)^{1/2} = e^{\frac{x}{2}}$
> et donc $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\,e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$.

8. *La fonction composée est* $x \mapsto \sqrt{x} \mapsto \sqrt{\sqrt{x}}$.
La $2^{\text{ème}}$ *fonction est la fonction racine carrée (la* $1^{\text{ère}}$ *aussi d'ailleurs).*

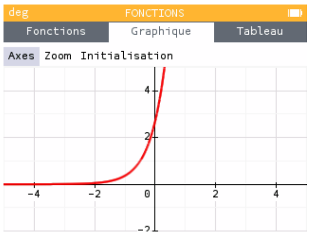
ψ est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

donc ψ est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et $\psi' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ → *Non dérivable en* 0 *qui annule* $\sqrt{x}$.

donc $\psi'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sqrt{x}}} = \dfrac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}}}$

---

② **1.** **a.**
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$.



b. h est de la forme e^u avec $u(x) = 2x+1$ et $u'(x) = 2$
donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h' = u'\,e^u$.
donc $h'(x) = 2\,e^{2x+1}$

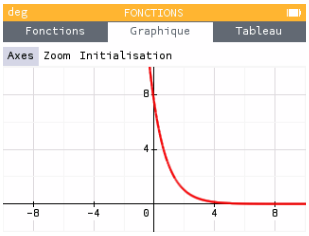
c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\,e^{2x+1} > 0$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signes de $h'(x)$	+
variations de h	0 ↗ $+\infty$

→ *Je n'oublie pas de placer les limites.*

---

2. **a.**
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (2-x) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.



- f est de la forme e^u avec $u(x) = 2-x$ et $u'(x) = -1$
donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'\,e^u$
donc $f'(x) = -e^{2-x}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2-x} > 0$ donc $-e^{2-x} < 0$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signes de $f'(x)$	–
variations de f	$+\infty$ ↘ 0

b. $\begin{cases} f'(1) = -e^{2-1} = -e \\ f(1) = e^{2-1} = e \end{cases}$

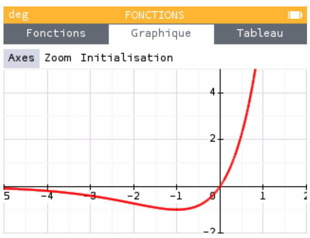
Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est :
$y = f'(1)\,(x-1) + f(1)$
$\Leftrightarrow$ $y = -e\,(x-1) + e$
$\Leftrightarrow$ $y = -ex + 2e$

Or : $-e\times 2 + 2e = -2e + 2e = 0$
donc la tangente passe bien par A .

---

3. **a.**
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+1} = +\infty$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{x+1} = +\infty$.



- On a un produit indéterminé $(-\infty)\times(0)$ quand x tend vers $-\infty$.

1ère méthode :

$x\,e^{x+1} = x\,\dfrac{x+1}{x+1}\,e^{x+1} = \dfrac{x}{x+1}(x+1)\,e^{x+1}$ → Je fais apparaître $X\,e^{X}$ en compensant.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} X\,e^{X} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)\,e^{x+1} = 0$.

D'autre part, $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$.

On en déduit par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

2ème méthode :

$x\,e^{x+1} = x\,e^{x}e$ → J'applique la vieille formule $a^{n+m} = a^{n}\times a^{m}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{x} = 0$ par croissances comparées

donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{x}e = 0$.

- g est de la forme $u\,e^{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = x+1 \text{ et } v'(x) = 1 \end{cases}$

donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = u'\,e^{v} + u\,v'\,e^{v}$

donc $g'(x) = 1\times e^{x+1} + x\times1\times e^{x+1}$
$= (x+1)\,e^{x+1}$

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{x+1} > 0$,
donc $g'(x)$ est du signe de $x+1$.

Pas besoin d'étude des annulations et signes avec quelque chose d'aussi simple que $x+1$!

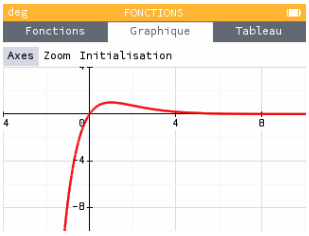
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signes de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g	0	↘	-1	↗	$+\infty$

$g(-1) = (-1)\,e^{-1+1}$
$= -1$

---

4. **a.**

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$.



D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{1-x} = -\infty$.

- $x\,e^{1-x} = \dfrac{x}{1-x}(1-x)\,e^{1-x}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} X\,e^{X} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\,e^{1-x} = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}-1} = 1$, donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{1-x} = 0$.

- F est de la forme $u\,e^{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = 1-x \text{ et } v'(x) = -1 \end{cases}$

donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = u'\,e^{v} + u\,v'\,e^{v}$

donc $F'(x) = 1\times e^{1-x} + x\times(-1)\times e^{1-x}$
$= (1-x)\,e^{1-x}$

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$,
donc $F'(x)$ est du signe de $1-x$.

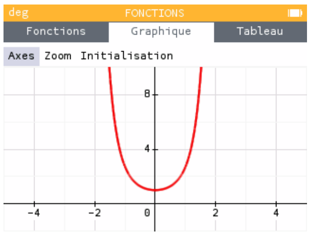
Pas besoin d'étude des annulations et signes avec quelque chose d'aussi simple que $1-x$!

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signes de $F'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de F	$-\infty$	↗	1	↘	0

$F(1) = 1\,e^{1-1}$
$= 1$

5. **a.** ◆ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2} = +\infty$.

De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2} = +\infty$. → Un « de même » pratique, autorisé uniquement quand c'est strictement la même chose !



◆ G est de la forme e^u avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$

donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G' = u'\,e^u$

donc $G'(x) = 2x\,e^{x^2}$

◆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2} > 0$,
donc $G'(x)$ est du signe de $2x$.

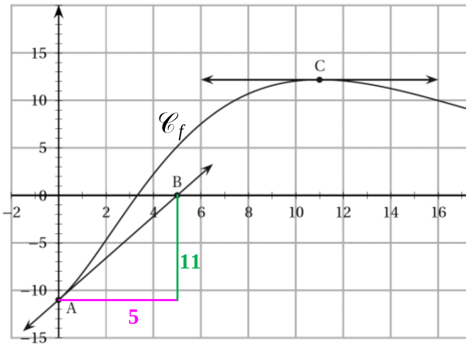
x	$-\infty$		0		$+\infty$
signes de $G'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de F	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$G(0) = e^{0^2}$
$= 1$

③ **1.** **a.** $f(0) = -11$

$f'(0) = \dfrac{11}{5}$ → Pour aller de A à B , j'avance de **5** et je monte de **11** .

$f'(11) = 0$ → Car la tangente est horizontale.



b. L'information la plus simple à utiliser est <u>les coordonnées d'un point sur la courbe</u>.
Le seul point que nous avons est A (pour C , on ne connaît pas son ordonnée) :
$A\,(0\,;-11)$ est sur la courbe $\mathscr{C}_f$
donc $f(0) = -11$
$\Leftrightarrow (0^2 + a)\,e^{b\times 0} = -11$
$\Leftrightarrow a = -11$

Il nous faut un autre type d'information...
L'autre information classique est <u>le coefficient directeur de la tangente en un point qui est égal au nombre dérivé</u>.
Nous en connaissons deux : celui de A et celui de C .
Mais d'abord, il nous faut la dérivée...

f est de la forme $u\,e^v$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - 11 \text{ et } u'(x) = 2x \\ v(x) = bx \text{ et } v'(x) = b \end{cases}$ → N'oubliez pas que $a = -11$.

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'\,e^v + u\,v'\,e^v$

donc $f'(x) = 2x\times e^{bx} + (x^2 - 11)\times b\times e^{bx}$
$= (2x + bx^2 - 11b)\,e^{bx}$

D'une part, le coefficient directeur de la tangente en A vaut $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-(-11)}{5-0} = \dfrac{11}{5}$. → On rédige proprement ce qu'on avait lu graphiquement.

D'autre part, il vaut $f'(0) = (2\times 0 + b\times 0^2 - 11b)\,e^{b\times 0} = -11b$.

On en déduit : $-11b = \dfrac{11}{5} \Leftrightarrow b = -0{,}2$.

Remarquons que le point C donnait le même résultat, mais de manière moins agréable :
D'une part, le coefficient directeur de la tangente en C vaut 0 .
D'autre part, il vaut $f'(11) = (2\times 11 + b\times 11^2 - 11b)\,e^{b\times 11}$.

On en déduit : $(2\times 11 + b\times 11^2 - 11b)\,e^{b\times 11} = 0$
$\Leftrightarrow 2\times 11 + b\times 11^2 - 11b = 0$ ou $e^{11b} = 0$
$\Leftrightarrow 2\times 11 + b\times 11^2 - 11b = 0$ car e^{11b} est strictement positif
$\Leftrightarrow 110\,b = -22$ → On aurait pu simplifier par 11 .
$\Leftrightarrow b = \dfrac{-22}{110} = -0{,}2$

c. L'ordonnée de C est $f(11) = (11^2 - 11)\,e^{-0{,}2\times 11}$
$= 110\,e^{-2{,}2}$
$\approx 12{,}19$ arrondi à 10^{-2} → On vérifie que c'est cohérent avec le graphique donné.

2. **a.** Utilisons **les coordonnées d'un point sur la courbe** : nous n'avons pas le choix, il n'y a que O .

O appartient à $\mathscr{C}_f$
donc $f(0) = 0$
$\Leftrightarrow$ $(a\times0+b)\,e^{-0^2} = 0$
$\Leftrightarrow$ $b = 0$

Utilisons **le coefficient directeur de la tangente en un point qui est égal au nombre dérivé** : nous n'avons pas le choix, il n'y a que la tangente en O .
Mais d'abord, il nous faut la dérivée...

f est de la forme $u\,e^v$ avec $\begin{cases} u(x) = ax \text{ et } u'(x) = a \\ v(x) = -x^2 \text{ et } v'(x) = -2x \end{cases}$ $\longrightarrow$ N'oubliez pas que $b = 0$.

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'\,e^v + u\,v'\,e^v$

donc $f'(x) = a\,e^{-x^2} + ax\times(-2x)\times e^{-x^2}$
$= (a - 2ax^2)\,e^{-x^2}$

D'une part, le coefficient directeur de la tangente en O vaut $\dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \dfrac{1-0}{0,5-0} = 2$.

D'autre part, il vaut $f'(0) = (a - 2a\times0^2)\,e^{-0^2} = a$.

On en déduit : $a = 2$.

Remarquez qu'on vous donne les réponses juste après !

b. L'indication donnée fait apparaître $\dfrac{X}{e^X}$ (qui est l'inverse de $\dfrac{e^X}{X}$) avec $X = x^2$.

D'une part , $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty \text{ par croissances comparées} \end{cases}$

donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$,

et donc, par inverse, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$.

On en déduit par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Version un peu plus rapide :

D'une part , $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$

donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = 0$.

c. D'après **a.**, $f'(x) = (2 - 4x^2)\,e^{-x^2}$.
$e^{-x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
donc $f'(x)$ est du signe de $(2 - 4x^2)$.

On propose ici une méthode astucieuse et rapide pour trouver les deux racines.
On peut bien sûr les trouver avec le discriminant.

$2 - 4x^2 = (\sqrt{2})^2 - (2x)^2$
$= (\sqrt{2} - 2x)(\sqrt{2} + 2x)$

Donc $2 - 4x^2$ a pour racines $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et est du signe de son coefficient dominant -4 négatif à l'extérieur de ses racines.

x	0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
signes de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$
$= \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}}$

---

3. **a.** Utilisons **les coordonnées de A sur la courbe** :
$\mathscr{C}_f$ passe par A
donc $f(0) = 0,5$
$\Leftrightarrow$ $\dfrac{a}{1 + e^{-b\times0}} = 0,5$
$\Leftrightarrow$ $\dfrac{a}{2} = 0,5$
$\Leftrightarrow$ $a = 1$

b. f est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^{-bx}$ et $u'(x) = -b\,e^{-bx}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{-u'}{u^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{-(-b\,e^{-bx})}{(1 + e^{-bx})^2}$
$= \dfrac{b\,e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$

c. D'une part, le coefficient directeur de la tangente en A vaut $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1 - 0{,}5}{10 - 0} = 0{,}05$.

D'autre part, il vaut $f\,'(0) = \dfrac{b\,\mathrm{e}^{-b\times 0}}{(1 + \mathrm{e}^{-b\times 0})^2} = \dfrac{b}{4}$.

On en déduit : $\dfrac{b}{4} = 0{,}05 \iff b = 0{,}2$.

---

4. L'énoncé donne des informations diffuses dans l'énoncé, ce qui montre qu'on attend une certaine culture de ce type d'exercice.

On cherche <u>deux valeurs</u>, donc on doit trouver dans les données <u>deux informations</u>.

- La première information est classiquement **<u>les coordonnées d'un point sur la courbe</u>** : pour $t = 0$, le plant mesure $0{,}1$ m .

  On sait que $h(0) = 0{,}1$.

  Et $h(0) = \dfrac{a}{1 + b\,\mathrm{e}^0} = \dfrac{a}{1+b}$, donc $\dfrac{a}{1+b} = 0{,}1$. → Aïe, équation à deux inconnues... Je dois patienter.

- Pas de tangente pour la deuxième information...

  La seule autre chose qui est dite, c'est que la hauteur limite est 2 m .

  D'autre part, on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 2$. → Nous allons calculer une limite avec paramètres.

  Or, $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}04t = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}04t} = 0$

  et donc, par produit et somme, $\lim\limits_{t\to+\infty} (1 + b\,\mathrm{e}^{-0{,}04t}) = 1$

  donc, par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0{,}04t}} = a$.

  On en déduit $a = 2$. → On a de la chance, on échappe au système de deux équations à deux inconnues...

- On a alors : $\dfrac{2}{1+b} = 0{,}1 \iff 1 + b = \dfrac{2}{0{,}1} \iff b = 20 - 1 = 19$.

---

5. **a.** f est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = ax \text{ et } u'(x) = a \\ v(x) = \mathrm{e}^{bx^2} \text{ et } v'(x) = 2bx\,\mathrm{e}^{bx^2} \end{cases}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f\,' = u'v + uv'$

donc $f\,'(x) = a\,\mathrm{e}^{bx^2} + ax\,(2bx\,\mathrm{e}^{bx^2})$

$= (a + 2abx^2)\,\mathrm{e}^{bx^2}$

b. Les informations que nous préférons sont les **<u>coordonnées de points sur la courbe</u>**.

Ici, nous n'avons que l'origine O .

Mais catastrophe ! Cela se traduit par :

$f(0) = 0$

$\iff a\times 0\,\mathrm{e}^{b\times 0^2} = 0$

$\iff 0 = 0$

:

- Utilisons **<u>la tangente au point d'abscisse 1</u>** :

  La tangente T est parallèle à l'axe des abscisses

  donc $f\,'(1) = 0$

  $\iff (a + 2ab\times 1^2)\,\mathrm{e}^{b\times 1^2} = 0$

  $\iff (a + 2ab)\,\mathrm{e}^b = 0$

  $\iff a + 2ab = 0$ car e^b ne peut être nul

  $\iff a(1 + 2b) = 0$

  $\iff a = 0$ ou $1 + 2b = 0$

  $\iff a = 0$ ou $b = -0{,}5$

  Or, la valeur $a = 0$ est impossible car alors la fonction f serait la fonction nulle, ce qui ne correspond pas à la courbe donnée.

  Donc $b = 0{,}5$.

- Utilisons **<u>la tangente en O</u>** :

  D'une part, le coefficient directeur de la tangente en O vaut $\dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \dfrac{1 - 0}{0{,}5 - 0} = 2$.

  D'autre part, il vaut $f\,'(0) = (a + 2a\times 0{,}5\times 0^2)\,\mathrm{e}^{0{,}5\times 0^2} = a$.

  On en déduit : $a = 2$.

Remarquons qu'il eut été plus simple de commencer par utiliser la tangente en O et trouver $a = 2$, puis d'utiliser l'autre tangente pour trouver b .

Mais il était intéressant de voir comment gérer le cas $a = 0$.

④ **1.** *Avoir un maximum signifie que la dérivée s'annule et passe du positif au négatif.*

Calculons la dérivée :

f_n est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-nx+1} \text{ et } v'(x) = -n\,e^{-nx+1} \end{cases}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$

donc $f'(x) = 1\,e^{-nx+1} + x\,(-n\,e^{-nx+1})$

$= (1 - nx)\,e^{-nx+1}$

e^{-nx+1} positif pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $f'(x)$ est du signe de $1 - nx$.

$1 - nx \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{n}$

x	0		$1/n$		$+\infty$
signes de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f		$\nearrow$	$f(\frac{1}{n})$	$\searrow$	

Donc, l'affirmation est vraie.

2. *Qui dit asymptote en $+\infty$ dit limite réelle.*

Calculons la limite.

On reconnaît la présence d'un cosinus que nous allons encadrer entre -1 et 1. :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$

donc $-e^{-x} \leqslant \cos(x) \leqslant e^{-x}$

Or, $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (-e^{-x}) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$

donc par encadrement (*ou* par le théorème des gendarmes), $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

donc la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote en $+\infty$.

Donc, l'affirmation est vraie.

---

⑤ *Réponses seules.*

1. **a.** 2 µg/mL

b. 12 secondes $= \dfrac{12}{60}$ minutes $= 0{,}2$ minute

$f(0{,}2) = 2{,}57\ldots > 2{,}5$

c. $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 2$

2. *Dérivez...*

3. **a.** f est croissante sur $[\,0\,;4\,]$ et décroissante sur $[\,4\,;+\infty\,[$.

b. Le taux de vasopressine maximal est atteint en $t = 4$.
Il vaut $f(4) \approx 6{,}41$ µg/mL.

---

⑥ **1.** f est de la forme $u\,v + b$ avec $\begin{cases} u(x) = x + \dfrac{1}{4} \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-4x} \text{ et } v'(x) = -4\,e^{-4x} \end{cases}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$

donc $f'(x) = 1 \times e^{-4x} + (x + \frac{1}{4})(-4\,e^{-4x})$

$= (1 - 4x - 1)\,e^{-4x}$

$= -4x\,e^{-4x}$

2. Pour tout $x \in [\,0\,;2\,]$, $\begin{cases} -4x < 0 \\ e^{-4x} > 0 \end{cases}$ donc $f'(x) < 0$

et donc f est strictement décroissante sur $[\,0\,;2\,]$.

Le tableau de variations n'est pas demandé mais on visualise mieux :

x	0		2
signes de $f'(x)$		$-$	
variations de f	$\frac{1}{4}+b$	↘	$\frac{9}{4}\,\mathrm{e}^{-8}+b$

$f(0) = \left(0+\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4\times 0}+b = \frac{1}{4}+b$

$f(2) = \left(2+\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4\times 2}+b = \frac{9}{4}\,\mathrm{e}^{-8}+b$

3. La hauteur maximale est atteinte en $x = 0$.
On a donc :

$f(0) = 1{,}5$
$\Leftrightarrow\ \frac{1}{4}+b = 1{,}5$
$\Leftrightarrow\ b = 1{,}5 - 0{,}25 = 1{,}25$

---

⑦ **Partie A**

1. *La définition de la suite n'est pas donnée dans le texte mais dans l'algorithme !*
Il faut voir dans la ligne `T = 0.82*T+3.6` *qu'on définit* (T_n) *par récurrence avec* $T_1 = 0{,}82\,T_0 + 3{,}6$.

$T_1 = 0{,}82\,T_0 + 3{,}6 = 0{,}82\times 1\,000 + 3{,}6 = 823{,}6$
$T_2 = 0{,}82\,T_1 + 3{,}6 = 0{,}82\times 823{,}6 + 3{,}6 = 678{,}952$
$T_3 = 0{,}82\,T_2 + 3{,}6 = 0{,}82\times 678{,}952 + 3{,}6 = 560{,}34064$
$T_4 = 0{,}82\,T_3 + 3{,}6 = 0{,}82\times 560{,}34064 + 3{,}6 \approx 463$

Au bout de 4 heures, la température est environ de 463°C.

On pouvait également obtenir cette valeur avec l'algorithme entré sur sa calculatrice.

2. *Pas d'indication dans l'énoncé, mais vous devez voir qu'il faut utiliser une démonstration par récurrence.*

- On pose $\mathscr{P}(n)$ l'égalité $T_n = 980\times 0{,}82^{\,n} + 20$.
- Initialisation :
  $\begin{cases} 980\times 0{,}82^{\,0} + 20 = 980 + 20 = 1\,000 \\ T_0 = 1\,000 \end{cases}$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$: $T_n = 980\times 0{,}82^{\,n} + 20$ vraie pour un certain n quelconque.
  Montrons $\mathscr{P}(n+1)$: $T_{n+1} = 980\times 0{,}82^{\,n+1} + 20$.
  Alors :

  Démonstration par transformations successives :
  $T_n = 980\times 0{,}82^{\,n} + 20$ par hypothèse de récurrence
  donc $0{,}82\,T_n = 0{,}82\,(980\times 0{,}82^{\,n} + 20)$
  donc $0{,}85\,T_n + 3{,}6 = 980\times 0{,}82^{\,n+1} + 16{,}4 + 3{,}6$
  donc $T_{n+1} = 980\times 0{,}82^{\,n+1} + 20$

  Démonstration directe :
  $T_{n+1} = 0{,}82\,T_n + 3{,}6$
  $= 0{,}82\,(980\times 0{,}82^{\,n} + 20) + 3{,}6$ par hypothèse de récurrence
  $= 980\times 0{,}82^{\,n+1} + 16{,}4 + 3{,}6$
  $= 980\times 0{,}82^{\,n+1} + 20$
- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

3.

```
n = 0
T = 1000
while T>=70 :
      T = 0.82*T+3.6
      n = n+1
print(n)
```

Le four peut être ouvert sans risque au bout de 15 heures.

Partie B

1. *La première information est l'image de 0 :*

D'une part :

$f(0) = 1\,000$
$\Leftrightarrow\ a\,\mathrm{e}^{-\frac{0}{5}} + b = 1\,000$
$\Leftrightarrow\ a + b = 1\,000$

La deuxième information est la relation qui lie la fonction et sa dérivée.
Calculons la dérivée :

Pour tout t positif, $f'(t) = a\left(-\frac{1}{5}\right)e^{-\frac{t}{5}} = -\frac{a}{5}e^{-\frac{t}{5}}$.

On en déduit d'autre part :

$$f'(0) + \frac{1}{5}f(0) = 4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{5}e^{-\frac{0}{5}} + \frac{1}{5}\left(a e^{-\frac{0}{5}} + b\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{b}{5} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{5} = 4$$

$$\Leftrightarrow b = 20.$$

On a alors : $a = 1\,000 - 20 = 980$.

Vous remarquerez qu'on vous donne les valeurs dans la question suivante...

On pouvait raisonner autrement :

D'autre part :

$f'(0) + \frac{1}{5}f(0) = 4$

donc $f'(0) = 4 - \frac{1}{5}f(0) = 4 - \frac{1}{5} \times 1\,000 = -196$

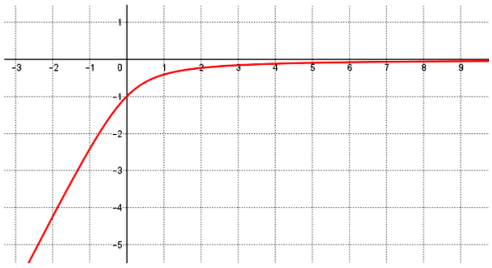
Or, pour tout t positif, $f'(t) = a\left(-\frac{1}{5}\right)e^{-\frac{t}{5}} = -\frac{a}{5}e^{-\frac{t}{5}}$

et donc $-\frac{a}{5}e^{-\frac{0}{5}} = -196 \Leftrightarrow \frac{a}{5} = 196 \Leftrightarrow a = 980$.

On a alors : $b = 1\,000 - 980 = 20$.

---

⑧ *Je commence par tracer la courbe sur ma calculatrice.*
Je vois que la limite en $-\infty$ est $-\infty$ et que la limite en $+\infty$ est 0 et qu'il y a une asymptote.
Et que la fonction est croissante.



1.

- On a la composition de fonctions : $x \mapsto x^2 + 1 \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases} \text{ donc, par composition, } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty.$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases} \text{ donc, par composition, } \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty.$$

- *La limite en $+\infty$ est une somme indéterminée.*
  La présence de la racine me fait penser à l'expression conjuguée :

$$x - \sqrt{x^2+1} = \frac{\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \end{cases} \text{ donc, par somme, } \lim_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = +\infty$$

donc, par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} = 0$.

- *La limite en $-\infty$ n'est pas une forme indéterminée...*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{x^2+1} = -\infty \end{cases} \text{ donc, par somme, } \lim_{x\to-\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = -\infty.$$

- La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

2.

- f est de la forme $u - \sqrt{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = x^2 + 1 \text{ et } v'(x) = 2x. \end{cases}$

  v ne s'annule pas donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u' - \frac{v'}{2\sqrt{v}}$.

  Donc $f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}}$$

- Pour tout $x \in]-\infty\,;0]$, on a $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} > 0 \\ -x \geqslant 0 \end{cases}$ donc $f'(x) > 0$.

- *Sur $\mathbb{R}+$, le numérateur est une différence de deux positifs, on ne peut donc pas conclure aussi vite que précédemment.*
  Lorsqu'une somme avec racine carrée vous embête, pensez à multiplier par le conjugué...

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}$$

Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} > 0 \\ \sqrt{x^2+1} + x > 0 \end{cases}$ et donc $f'(x) > 0$.

3.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signes de $f'(x)$	$+$
variations de f	$-\infty \nearrow 0$

4. **a.** $\begin{cases} f(0) = 0 - \sqrt{0^2+1} = -1 \\ f'(0) = \dfrac{\sqrt{0^2+1} - 0}{\sqrt{0^2+1}} = 1 \end{cases}$

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\Leftrightarrow\ y = 1(x-0) - 1$ ← *Je transforme par équivalences.*

$\Leftrightarrow\ y = x - 1$

- *On étudie les positions relatives de deux courbes en étudiant les signes de $f(x) - g(x)$.*
  Ici, $g(x)$ est représenté par le membre de droite $x - 1$ de l'équation cartésienne de la tangente.

$$f(x) - (x-1) = x - \sqrt{x^2+1} - (x-1)$$
$$= 1 - \sqrt{x^2+1}$$

→ *Étude de signes d'une somme avec racine carrée ? Conjugué...*

$$= \frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{1+\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{1-x^2-1}{1+\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{-x^2}{1+\sqrt{x^2+1}}$$

$\begin{cases} -x^2 \text{ toujours négatif} \\ 1+\sqrt{x^2+1} \text{ toujours positif} \end{cases}$

donc $f(x) - (x-1) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc, $\mathscr{C}$ est en-dessous de (Δ) sur $\mathbb{R}$.

---

⑩ **Partie A**

1. Pour tout entier naturel n :

f_n est de la forme $u + e^v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = n(x-1) \text{ et } v'(x) = n \end{cases}$

donc f_n dérivable sur $[0;1]$ et $f_n' = u' + v'e^v$

donc $f_n'(x) = 1 + n\,e^{n(x-1)}$ → *Je ne vois pas comment factoriser... Vous non plus ?*

Pour tout $x \in [0;1]$, $\begin{cases} 1 > 0 \\ n \geqslant 0 \\ e^{n(x-1)} > 0 \end{cases}$ donc $f_n'(x) > 0$ → *C'est assez rare d'avoir une situation aussi simple d'une somme de termes tous positifs !!!*

donc f_n strictement croissante sur $[0;1]$.

On en déduit que le minimum est atteint en $x = 0$ et vaut $f_n(0) = 0 + e^{n(0-1)} = e^{-n} > 0$

donc f_n positive sur $[0;1]$.

2. *Le point est très facile à trouver en regardant le graphique !*

Pour tout entier naturel n, $f_n(1) = 1 + e^{n(1-1)} = 1 + 1 = 2$

donc, toutes les courbes C_n passent par $A(1;2)$.

3.
- On voit sur le graphique que les tangentes se rapprochent de la verticale.
  Donc, on peut conjecturer que leurs coefficients directeurs a_n tendent vers $+\infty$.
- Le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_n$ est $f_n'(1)$.
  Donc, pour tout entier naturel n, $a_n = 1 + n\,e^{n(1-1)} = 1 + n$.
  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+n) = +\infty$
  donc la conjecture est démontrée.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = f_n(1)$

$= 1 + e^{n(1-1)}$

$= 1 + 1 = 2$

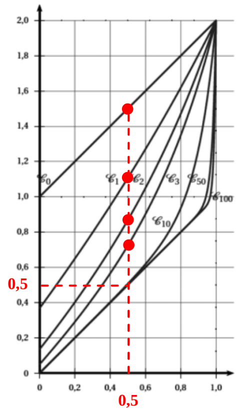
donc la suite (u_n) est constante égale à 2.

2. Pour tout entier naturel n, $u_n = f_n(0,5)$

$= 0,5 + e^{n(0,5-1)}$

$= 0,5 + e^{-0,5\,n}$

$= 0,5 + (e^{-0,5})^n$ → *Je dois voir la suite géométrique...*



$e^{-0,5} = 0,6...$

donc $-1 < e^{-0,5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (e^{-0,5})^n = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0,5$.

→ On le confirme graphiquement :

Les points d'abscisses 0,5 se rapprochent du point (0,5 ; 0,5) .

3. Pour tout entier naturel n , $u_n = f_n(x)$

$$= x + e^{n(x-1)}$$

$$= x + (e^{(x-1)})^n$$

Pour tout $x \in [\, 0 \,;\, 1 \,[$, on a :

$0 \leqslant x < 1$

$\Leftrightarrow \ -1 \leqslant x - 1 < 0$

$\Leftrightarrow \ e^{-1} \leqslant e^{(x-1)} < e^0$

$\Leftrightarrow \ 0,3... \leqslant e^{(x-1)} < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (e^{(x-1)})^n = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.

Là aussi, on le confirme graphiquement en voyant que les courbes se rapprochent du segment diagonal du carré de côté 1, dont les points ont pour coordonnées (x ; x) .