Savoir ÉTABLIR LE TABLEAU DE VARIATIONS D'UNE FONCTION

Ce que je dois savoir faire

- **Calculer l'expression de $f'(x)$** $\rightarrow$ voir la fiche **FCT 3**

- **Étudier les signes des facteurs de $f'(x)$ pour en déduire les signes de $f'(x)$**
  - On signale les facteurs strictement positifs (essentiellement des carrés ou des racines en dénominateur) et on écrit que $f'(x)$ est du signe de ce qui reste.

    Par exemple, $\dfrac{2x-6}{(x-4)^2}$ est du signe de $2x-6$ sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

    Mais attention, $(2x-6)(x-4)^2$ est aussi du signe de $2x-6$ mais $(x-4)^2$ apporte une annulation en 4.
  - *Pour un facteur affine*, c'est élémentaire :
    - on trouve l'abscisse où il s'annule (en résolvant $ax+b=0$),
    - on choisit entre $\boxed{+ \ 0 \ -}$ et $\boxed{- \ 0 \ +}$ selon le signe du coefficient directeur.
  - *Pour un facteur polynôme du second degré* :
    - on vérifie d'abord si on ne peut pas le factoriser avec une identité remarquable,
    - sinon, on trouve le discriminant puis
      - s'il y a deux racines, choisir entre $\boxed{+ \ 0 \ - \ 0 \ +}$ et $\boxed{- \ 0 \ + \ 0 \ -}$ selon le signe du coefficient dominant,
      - s'il y a une racine, choisir entre $\boxed{+ \ 0 \ +}$ et $\boxed{- \ 0 \ -}$ selon le signe du coefficient dominant,
      - s'il n'y a pas de racine, choisir entre $\boxed{\ + \ }$ et $\boxed{\ - \ }$ selon le signe du coefficient dominant.
  - *S'il y a deux facteurs* pour $f'(x)$ de la forme $(\textit{facteur 1})(\textit{facteur 2})$:
    - avant la ligne « **signes de** $f'(x)$ », on ajoute une ligne « **signes de** $(\textit{facteur 1})$ »
      et une ligne « **signes de** $(\textit{facteur 2})$ »,
    - on en déduit la ligne « **signes de** $f'(x)$ » avec la règle des signes.

    Même chose avec plus de deux facteurs.

- **Établir le tableau de variations de f**
  - Après avoir rempli la 1ère ligne du tableau, celle de $\boxed{x}$, et la 2ème ligne du tableau, celle de $\boxed{\text{signes de } f'(x)}$, on en déduit la 3ème ligne du tableau, celle de $\boxed{\text{variations de } f}$.
    Une flèche $\nearrow$ sous les $+$ de la dérivée et une flèche $\searrow$ sous les $-$ de la dérivée.
  - À côté ou en-dessous du tableau, montrez les calculs des valeurs particulières.

  ⚠ N'oubliez pas la double barre $\|$ pour les valeurs interdites.

  ☠ En présence de $\sqrt{x}$ en numérateur :
  - vous aurez une double barre en 0 dans la ligne $\boxed{\text{signes de } f'(x)}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0,
  - mais vous n'aurez pas une double barre en 0 dans la ligne $\boxed{\text{variations de } f}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie en 0.

  Si $\sqrt{x}$ est en dénominateur, vous aurez une double barre en 0 dans les deux lignes.

Remarques sur les exercices

- Pour chaque fonction, il faut faire chacune des actions décrites ci-dessus.
- Avant même de commencer votre étude, tracez la fonction sur votre calculatrice pour avoir déjà une idée des variations, ça vous permettra de vérifier.
  On vous pardonnera une erreur de calcul mais pas de présenter un tableau de variations non conforme à une courbe que vous pouvez tracer en quelques secondes…
- L'exercice ① ne traite que des fonctions polynômes, les calculs de dérivées sont donc très simples.
  Dans la question **1.**, nous avons une fonction du second degré dont on sait étudier les variations depuis le début de l'année. Mais testez quand même votre méthode sur cet exemple très simple.
  Les autres fonctions sont des polynômes de degrés supérieurs à 2.
- L'exercice ② traite de fonctions homographiques $\dfrac{1}{u}$ et $\dfrac{u}{v}$.
  Les calculs de dérivées nécessitent donc les formules.
- L'exercice ③ utilise la fonction racine carrée et demandera des calculs plus compliqués.

① Exercices **1.** à **5.** indépendants

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 53x + 30$.

2. G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$.

3. F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x - 2$.

4. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$.

5. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + 3x - 3$.

---

② Exercices **1.** à **4.** indépendants

1. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ -\frac{1}{2} \}$ par $f(x) = \frac{1}{2x+1}$.

2. h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ -2 \}$ par $h(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

3. φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

4. G définie par $G(x) = \frac{x-2}{x^2+x-2}$.
On commencera par déterminer l'ensemble de définition de G .

---

③ Exercices **1.** à **3.** indépendants

1. Établir le tableau de variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}+$ par $g(x) = x + \sqrt{x}$.

2. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}+$ l'équation $2\sqrt{x} - 1 = 0$.

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}+$, si on a $2\sqrt{x} - 1 > 0$, alors on a $x > \frac{1}{4}$.

On admettra de même que, pour tout $x \in \mathbb{R}+$, si on a $2\sqrt{x} - 1 < 0$, alors on a $x < \frac{1}{4}$.

c. Établir le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = x - \sqrt{x}$.

3. On donne la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}+$ par $\psi(x) = x\sqrt{x}$.

a. Exprimer $\frac{\psi(0+h) - \psi(0)}{h}$ en fonction de h .

En déduire que ψ est dérivable en 0 et donner la valeur de $\psi'(0)$.

b. Établir le tableau de variations de ψ .
