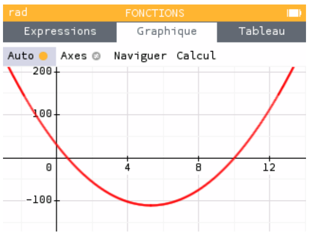
Correction de ÉTUDES DE FONCTIONS - Fiche 4

① **1.** On trace la courbe sur la calculatrice pour être sûr de présenter un tableau de variations cohérent :



- f fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5\times2x - 53$
$= 10x - 53$

Solution de l'équation $10x - 53 = 0$

Les signes d'une fonction affine sont élémentaires :

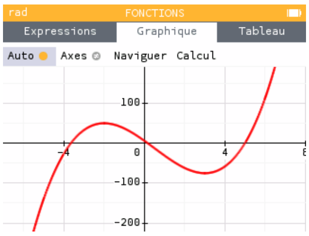
Car le coefficient directeur de $10x - 53$ est positif.

x	$-\infty$		5,3		$+\infty$
signes de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		↘	$-110{,}45$	↗	

$f(5{,}3) = 5\times5{,}3^2 - 53\times5{,}3 + 30$
$= -110{,}45$

On pouvait obtenir la même chose avec ce qu'on sait des fonctions polynômes du second degré (voir fiche POL 2) : 5,3 se trouve avec $-\dfrac{b}{2a}$ et on choisit les variations avec le signe du coefficient dominant 5 .

2.



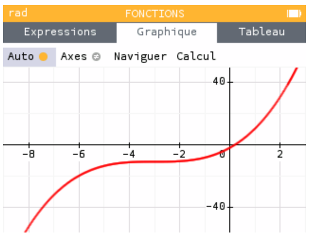
- G fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = 2\times3x^2 - 3\times2x - 36$
$= 6x^2 - 6x - 36$ → Polynôme du second degré, j'utilise Δ .
- $\Delta = (-6)^2 - 4\times6\times(-36) = 900 > 0$
donc il y a deux racines $\dfrac{-(-6)+\sqrt{900}}{2\times6} = 3$ et $\dfrac{-(-6)-\sqrt{900}}{2\times6} = -2$.
Le coefficient dominant 6 est positif donc :

Je détaille au moins un calcul de valeur.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
signes de $G'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de G		↗	50	↘	-75	↗	

$G(-2) = 2\times(-2)^3 - 3\times(-2)^2 - 36\times(-2) + 6 = 50$
$G(3) = -75$

3.



On remarque une variation très spéciale :
- la fonction est croissante jusqu'à -3 ,
- en -3 , il y a une tangente horizontale,
- puis, après -3 , la fonction est de nouveau croissante.

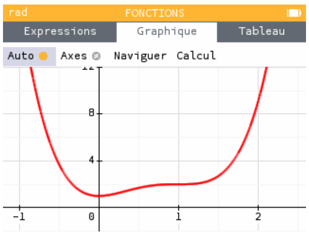
- F fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \dfrac{1}{3}\times3x^2 + 3\times2x + 9$
$= x^2 + 6x + 9$ → Polynôme du 2ème degré, mais je reconnais une identité remarquable...
$= (x+3)^2$ → ... enfin, j'espère que vous aussi... sinon, quel temps perdu...
- $F'(x)$ s'annule en -3 et est toujours positif sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
signes de $F'(x)$		$+$	0	$+$	
variations de F		↗	-7	↗	

$F(-3) = \dfrac{1}{3}(-3)^3 + 3\times(-3)^2 + 9\times(-3) - 2$
$= -7$

Ce carré comme dérivée a été donc une très bonne nouvelle !
De manière générale, vous allez aimer les carrés dans les dérivées car ils vous épargnent des études de signes...

4.



Oh, une courbe étrange...

- g fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3\times4x^3 - 8\times3x^2 + 6\times2x$

$= 12x^3 - 24x^2 + 12x$ → Au secours ! Un polynôme du 3ème degré, je dois absolument factoriser.

$= 12x\,(x^2 - 2x + 1)$ → Un facteur commun sympa...

$= 12x\,(x-1)^2$ → ... et une identité remarquable sympa pour un carré très sympa !

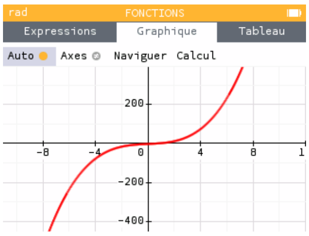
- On a deux facteurs dont les signes sont très simples et qu'on peut insérer dans le tableau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signes de $12x$		$-$	0	$+$		$+$	
signes de $(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
signes de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
variations de g		↘	1	↗	2	↗	

$g(0) = 3\times0^4 - 8\times0^3 + 6\times0^2 + 1 = 1$

$g(1) = 2$

5.



On a déjà une idée du tableau de variations.
C'est toujours croissant, avec peut-être une tangente horizontale...

- h fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 3x^2 + 3$
- $3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$: impossible

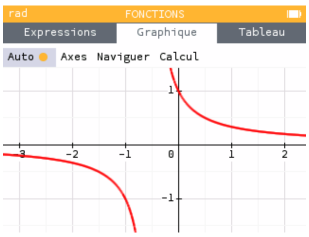
Le coefficient dominant 3 est positif, donc :

On peut aussi utiliser le discriminant :
$\Delta = 0^2 - 4\times3\times3 = -36 < 0$
donc il n'y a pas de racine.

x	$-\infty$		$+\infty$
signes de $h'(x)$		$+$	
variations de h		↗	

Et en fait, il n'y a pas de tangente horizontale...

② **1.**



On voit la valeur interdite qui provoque une asymptote verticale.
Et on voit que ce sera toujours décroissante...

- f de la forme $\frac{1}{u}$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $u'(x) = 2$

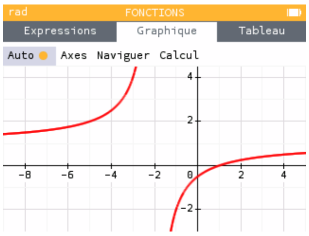
donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ et $f' = \frac{-u'}{u^2}$

donc $f'(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2}$ → Une dérivée super sympa : un numérateur toujours négatif et un dénominateur toujours positif !

- -2 négatif et, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, $(2x+1)^2$ toujours positif, donc :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signes de $f'(x)$		$-$	‖	$-$	
variations de f		↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	

2.



- h de la forme $\frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x - 1 \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = x + 2 \text{ et } v'(x) = 1 \end{cases}$

  donc h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ -2 \}$ et $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

  donc $h'(x) = \frac{1 \times (x+2) - (x-1) \times 1}{(x+2)^2}$

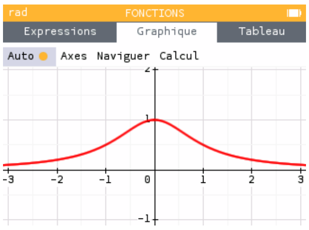
  $= \frac{x + 2 - x + 1}{(x+2)^2}$

  $= \frac{3}{(x+2)^2}$ → *Encore une dérivée super sympa !*

- 3 positif et, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{ -2 \}$, $(x+2)^2$ toujours positif, donc :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
signes de $h'(x)$		+	‖	+	
variations de h		↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	

3.



- φ de la forme $\frac{1}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$

  donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi' = \frac{-u'}{u^2}$

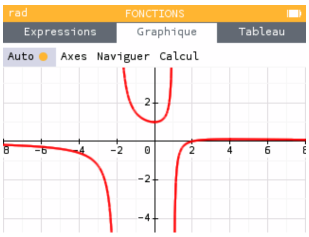
  donc $\varphi'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ → *On a au moins un dénominateur sympa...*

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x^2+1)^2$ toujours positif,
  donc $\varphi'(x)$ est du signe de $-2x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signes de $\varphi'(x)$		+	0	$-$	
variations de φ		↗	1	↘	

$\varphi(0) = \frac{1}{0^2 + 1} = 1$

4.



Ouh la, ça a l'air compliqué...

- Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$

  donc il a deux valeurs interdites qui sont $\frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 1$ et $\frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -2$

  Donc l'ensemble de définition de G est $\mathbb{R} \setminus \{ -2 ; 1 \}$.

- G de la forme $\frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x - 2 \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = x^2 + x - 2 \text{ et } v'(x) = 2x + 1 \end{cases}$

  donc G dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ -2 ; 1 \}$ et $G' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

donc $G'(x) = \dfrac{1\times(x^2+x-2)-(x-2)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$

$= \dfrac{x^2+x-2-2x^2-x+4x+2}{(x^2+x-2)^2}$

$= \dfrac{-x^2+4x}{(x^2+x-2)^2}$ → *Le dénominateur est toujours sympa...*

$= \dfrac{x(-x+4)}{(x^2+x-2)^2}$ → *... et ça vaut le coup de faire l'effort de factoriser le numérateur.*

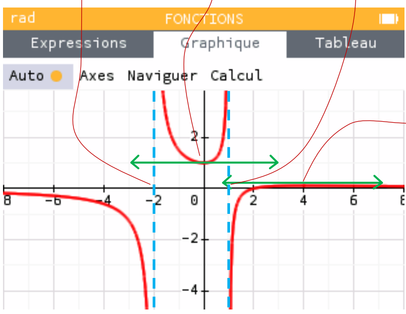
- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 1\}$, on a $(x^2+x-2)^2$ toujours positif,
  donc $\varphi'(x)$ est du signe de $x(-x+4)$.

*Comme dans le ① **4.**, on a deux facteurs qu'on peut présenter dans le tableau :*

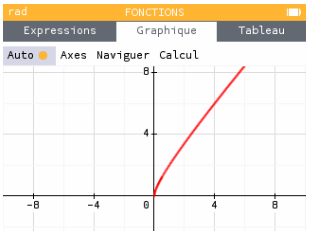
x	$-\infty$		-2		0		1		4		$+\infty$
signes de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signes de $-x+4$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signes de $(x^2+x-2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signes de $G'(x)$		$-$	‖	$-$		$+$	‖	$+$		$-$	
variations de G		↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$1/9$	↘	

$G(0) = \dfrac{0-2}{0^2+0-2} = 1$

$G(4) = \dfrac{1}{9}$



③ **1.**



- g de la forme $u+v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{x} \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

  donc g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $g' = u' + v'$

  donc $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

  $= \dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ → *On a le réflexe de réduire au même dénominateur...*

$\sqrt{x}$ est toujours positif ou nul (il est nul en 0)
donc de même pour $2\sqrt{x}$.
Mais on est sauvé par l'ajout de 1 !
$2\sqrt{x}+1$ devient toujours strictement positif.

Explication plus théorique :
$\sqrt{x} \geqslant 0$
donc $\sqrt{x}+1 \geqslant 1$
donc $\sqrt{x}+1 > 0$

- Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a $\begin{cases} 2\sqrt{x}+1 \text{ toujours strictement positif} \\ 2\sqrt{x} \text{ toujours positif,} \end{cases}$ donc :

On avait en fait pas besoin de réduire au même dénominateur...
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est toujours strictement positif
donc $1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est toujours strictement positif

x	0		$+\infty$
signes de $g'(x)$	‖	$+$	
variations de g	0	↗	

$g(0) = 0 + \sqrt{0} = 0$

Remarquez la particularité de ce tableau :
- il y a une double barre dans la $2^{\text{ème}}$ ligne car g n'est pas dérivable en 0 (présence d'une tangente verticale),
- il n'y a pas de double barre dans la $1^{\text{ère}}$ ligne car g est bien définie en 0.

2. **a.** Dans $\mathbb{R}+$:

$$2\sqrt{x} - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (\frac{1}{2})^2$$

→ Attention, l'équivalence n'est assurée ici que parce que les nombres sont positifs (on est dans $\mathbb{R}^+$).

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Donc, la solution est $\frac{1}{4}$.

b. Dans $\mathbb{R}+$:

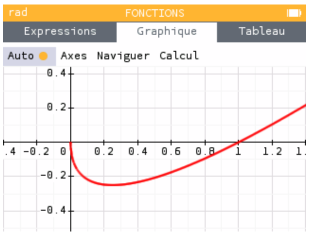
si $2\sqrt{x} - 1 > 0$

alors $\sqrt{x} > \frac{1}{2}$

alors $(\sqrt{x})^2 > (\frac{1}{2})^2$ car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$ (elle conserve l'ordre)

alors $x > \frac{1}{4}$

c.



- f de la forme $u - v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{x} \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

  donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f' = u' - v'$

  donc $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

  $= \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$

  → Il ressemble à celui du **1.** mais le $-$ pose un gros problème ! Mais on reconnaît l'expression du **a.** et du **b.** ...

- Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a $2\sqrt{x}$ toujours positif,

  donc $f'(x)$ est du signe de $2\sqrt{x} - 1$,

  donc, d'après les questions **a.** et **b.** :

x	0		$1/4$		$+\infty$
signes de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	0	↘	$-1/4$	↗	

$$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

---

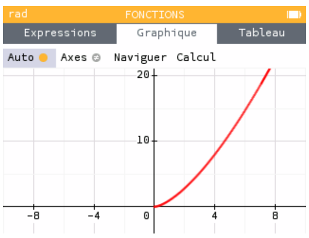
3. **a.**

$$\frac{\psi(0+h) - \psi(0)}{h} = \frac{(0+h)\sqrt{0+h} - 0\sqrt{0}}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\psi(0+h) - \psi(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt{h} = 0$$

donc, ψ est dérivable en 0 et $\psi'(0) = 0$.

b.



- ψ de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{x} \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

  donc ψ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ avec $\psi' = u'v + uv'$

  → Attention, dans cette partie, 0 est exclus du domaine de dérivabilité.

donc $\psi'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ → *D'ailleurs, 0 est une valeur interdite dans cette expression.*

$= \dfrac{2\sqrt{x} \times \sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{3x}{2\sqrt{x}}$ → *On pourrait s'arrêter là : x et $\sqrt{x}$ sont de signes très faciles à étudier.*

$= \dfrac{3\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}}{2\cancel{\sqrt{x}}}$ → *Mais on peut astucieusement simplifier !*

$= \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ → $\left\{ \begin{array}{l} \text{D'une part, on voit que, en fait, } 0 \text{ n'est pas une valeur interdite} \\ \text{et, d'autre part, on gagne un signe super simple à étudier...} \end{array} \right.$

- $\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ est nul en 0 et positif pour tout $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$, donc :

x	0		$+\infty$
signes de $\psi'(x)$	0	$+$	
variations de ψ	0	↗	

$\psi(0) = 0\sqrt{0} = 0$