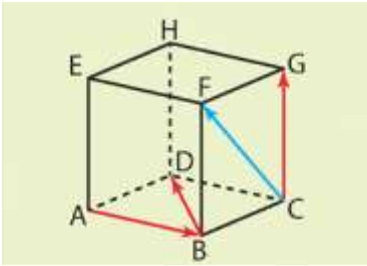
Nom : Prénom : Classe : Term ….	**INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES N°4_bis** **Entrainement_ corrigé**	
Thème : vecteurs, droites et plan de l'espace		***calculatrice autoriseé***

EXERCICE 1 :



Dans le cube ABCDEFGH, lire la décomposition du vecteur $\overrightarrow{CF}$

dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CG})$.

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CG}$ d'après la règle du parallélogramme dans BCFG.

$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CG} = \left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}\right) + \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG}$

EXERCICE 2 :

Dans le cube ABCDEFGH, le triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CG})$ est-il une base de l'espace ?

On se placera dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ pour raisonner.

Dans le repère $(A, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$,on a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CG}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

On suppose qu'il existe deux nombres r et s tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = r\overrightarrow{\mathrm{BH}} + s\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ ce qui peut s'écrire sous le système suivant :

$\begin{cases} 1 = -r \\ 0 = r \\ 0 = r + s \end{cases}$ qui n'a pas de solution.

Donc il n'existe pas deux nombres r et s tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = r\overrightarrow{\mathrm{BH}} + s\overrightarrow{\mathrm{CG}}$, donc le triplet $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{BH}}, \overrightarrow{\mathrm{CG}})$est bien une base de l'espace.

EXERCICE 3 :

1. Soit la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -1 + 3t, t \in R \\ z = 5t \end{cases}$

   Déterminer les éléments caractéristiques de cette droite
   (les coordonnées d'un point de la droite et celles d'un vecteur directeur).

   Le point I de cordonnées $(2; -1; 0)$ est un point de la droite.

   Un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-4\\3\\5\end{pmatrix}$

2. **a.** Soient deux points A et B de coordonnées respectives A(-1;2;-4) et B(0;1;3). Déterminer une représentation paramétrique de cette droite.

   On peut prendre pour vecteur directeur de la droite (AB), le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de (AB), sera alors : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -4 + 7t \end{cases}, t \in R$

b. Le point M(1;0;10) appartient-il à cette droite (AB)?

Afin que M appartienne à la droite (AB), il faudrait trouver un réel t tel que : $\begin{cases} 1 = -1 + t \\ 0 = 2 - t \\ 10 = -4 + 7t \end{cases}$

Ce qui est possible avec $t = 2$.
Donc M appartient effectivement à la droite (AB).

EXERCICE 4 :

Justifier pourquoi les droites (d) et (d') dont les représentations paramétriques sont données ci-dessous :

a. ne sont pas parallèles entre elles, $(d)\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 4 - 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ $et\ (d')\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -9 - 5k \\ z = 3 + 3k \end{cases}$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d) et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d').

$x_{\vec{v}} = 2 \times x_{\vec{u}}$ mais $y_{\vec{v}} \neq 2 \times y_{\vec{u}}$, ce qui signifie que les vecteurs ne sont pas colinéaires et donc que (d) et (d') ne sont pas parallèles entre elles.

b. prouver qu'elles sont sécantes en déterminant les coordonnées de leur point d'intersection.

On suppose qu'il existe un point M, intersection des deux droites, ses coordonnées vérifient alors les deux représentations paramétriques et on a :

$$\begin{cases} -2 + t = 3 + 2k \\ 4 - 3t = -9 - 5k \\ -1 - 2t = 3 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2k = 5 \\ -3t + 5k = -13 \\ -2t - 3k = 4 \end{cases}$$

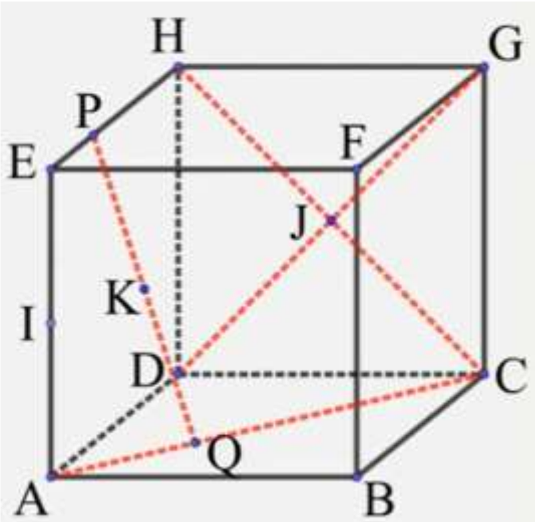
Résolution du système constitué des lignes 1 et 3 du précédent système :

$$\begin{cases} -7k = 14 \\ 7t = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2L1 + 2L3 \\ 3L1 - 2L3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$

On remplace les valeurs trouvées dans L2 :

$-3 \times 1 + 5 \times (-2) = -13$ cela correspond bien au résultat du membre de droite de L2, donc le point M existe, ce qui signifie que les droites sont effectivement sécantes et les coordonnées du point d'intersection sont : $(-2 + 1; 4 - 3 \times 1;\ -1 - 2 \times 1)$ soit M(-1 ;1 ;-3)

EXERCICE 5 :



ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

I est le milieu de l'arête [AE], J est le centre de la face CDHG,

P et Q sont les points définis par : $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Et K est le milieu du segment [PQ].

1. Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AQ}$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$.

2. En déduire que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

3. Que peut-on en déduire quant aux points I, J et K ? Vous justifierez votre réponse.

On vient de prouver que $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IK}$, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont alors colinéaires et ayant le point I en commun cela signifie que les trois points i, K et K sont alignés.

4. Construire le point Z défini par $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{EP} - \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$.

5. Les points I, J, K et Z sont-ils coplanaires ?

Les points I, J, K appartiennent à un plan parallèle au plan (ABD) puisque les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ s'écrivent comme combinaison linéaire de deux vecteurs formant une base de ce plan, à savoir $\overrightarrow{AB}\ \ et\ \overrightarrow{AD}$.

Or le point Z appartient à la face (EFH), puisque $\overrightarrow{EZ}$ s'écrit comme combinaison linéaire de deux vecteurs formant une base de ce plan, à savoir $\overrightarrow{EP}\ \ et\ \overrightarrow{HG}$.Le point Z appartient donc à un plan strictement parallèle à celui contenant I, J et K donc les 4 points I, J, K et Z ne sont pas coplanaires.