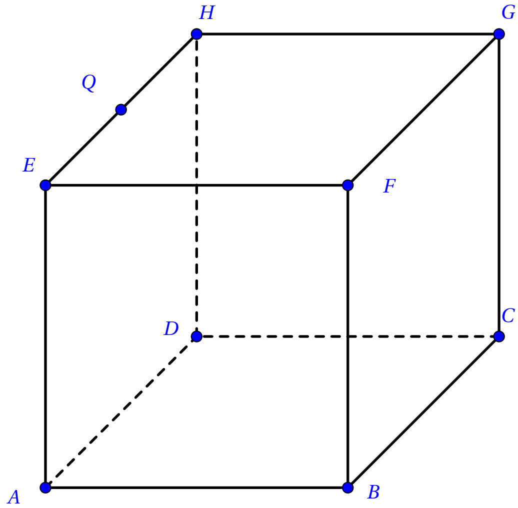
ൈ Éléments de correction de l'interrogation n°9 ൈ

Exercice 1

Dans le cube ABCDEFGH, Q est le milieu de [EH]. Lire la décomposition du vecteur $\overrightarrow{BQ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CG})$.



Solution :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BQ} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EQ}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Exercice 2

Dans le cube ABCDEFGH, on pose P milieu de [HG] et J milieu de [FG]. Le triplet $(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AJ})$ est-il une base de l'espace ?
On se placera dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ *pour raisonner.*

Solution : Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

On veut vérifier si ces 3 vecteurs sont colinéaires ou non.
Pour cela, on suppose qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{AP} + \beta\overrightarrow{AJ}$ ce qui peut s'écrire sous le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 &=& \frac{1}{2}\alpha+\beta\\ 1 &=& \alpha+\frac{1}{2}\beta\\ 1 &=& \alpha+\beta\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& 2-2\beta\\ 1 &=& 2-2\beta+\frac{1}{2}\beta\\ 1 &=& 2-2\beta+\beta\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& 2-2\beta\\ \frac{3}{2}\beta &=& 1\\ \beta &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& 2-2\beta\\ \beta &=& \frac{2}{3}\\ \beta &=& 1\end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution, donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base de l'espace.

.

Exercice 3

1. **a.** Soit la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& -1+2t\\ z &=& 3-t\end{array}\right.$

   Déterminer les éléments caractéristiques de cette droite (les coordonnées d'un point de la droite et celles d'un vecteur directeur).

Solution : Le point $D\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un point de la droite (d) et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

b. Le point $A(2;3;-1)$ appartient-il à cette droite (d) ?

Solution : Pour savoir si A appartient à la droite, il faut vérifier que des coordonnées vérifient le système de la représentation paramétrique de la droite (d) :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 & = & t \\ 3 & = & -1+2t \\ -1 & = & 3-t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 2 \\ 2t & = & 4 \\ t & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 2 \\ t & = & 2 \\ t & = & 4 \end{array}\right.$$
Ce système n'a pas de solution, donc le point A n'appartient pas à la droite (d).

2. Soient deux points M et N de coordonnées respectives $M(3;-2;1)$ et $N(1;1;-4)$. Déterminer une représentation paramétrique la droite (MN).

Solution : Le vecteur $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-2\\3\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (MN). Une représentation paramétrique de (MN) est donc : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3-2t \\ y & = & -2+3t \\ z & = & 1-5t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$

Exercice 4

Soient (d) et (d') deux droites de l'espace dont les représentations paramétriques sont :
$$(d)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+2t \\ y & = & 1-t \\ z & = & 5+2t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d')\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1-4k \\ y & = & 2k \\ z & = & -3+4k \end{array}\right. , k \in \mathbb{R}.$$

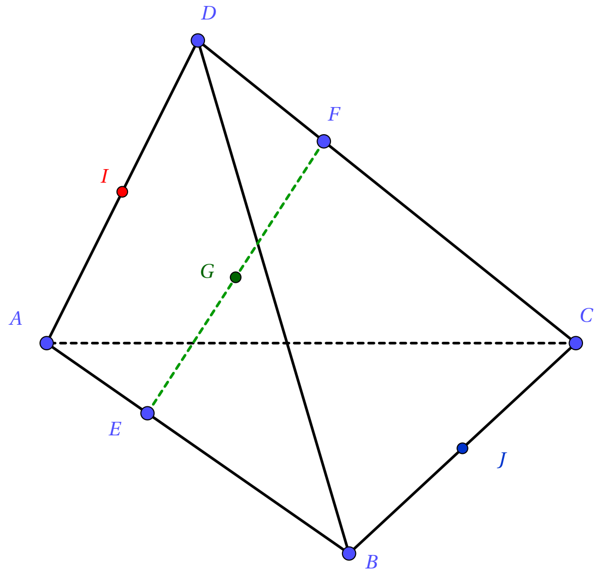
1. Démontrer qu'elles ne sont pas parallèles entre elles.

Solution : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).
On remarque que $x_{\overrightarrow{u'}} = -2x_{\vec{u}}$, $y_{\overrightarrow{u'}} = -2y_{\vec{u}}$ mais $z_{\overrightarrow{u'}} \neq -2z_{\vec{u}}$, les vecteurs directeurs des deux droites sont donc non colinéaires, donc les deux droites ne sont pas parallèles.

2. Sont-elles coplanaires ?

Solution : Les deux droites n'étant pas parallèles, elles sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes. Supposons qu'il existe un point M, intersection des deux droites, ses coordonnées vérifient alors les deux représentations paramétriques et on a :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2+2t & = & -1-4k \\ 1-t & = & 2k \\ 5+2t & = & -3+4k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 1-2k \\ 2+2(1-2k) & = & -1-4k \\ 5+2(1-2k) & = & -3+4k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 1-2k \\ 4 & = & -1 \\ k & = & \dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$
Ce système n'a pas de solution, donc les deux droites ne sont pas sécantes et donc pas coplanaires.

Exercice 5



ABCD est un tétraèdre.

Les points I et J sont les milieux des arêtes [AD] et[BC].

Les points E et F sont les points définis par :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

G est le milieu de [EF]

On admet que : $\overrightarrow{EG} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

1. Montrer que $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Solution :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IG} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{2-1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2-3}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

2. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Solution :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

3. Que peut-on en déduire quant aux points I, J, G? Justifier votre réponse.

Solution : Grâce aux deux questions précédentes, on voit que $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IG}$, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont donc colinéaires. Or, ils sont le point I en commun. On peut donc conclure que les points I, J et G sont alignés.

.