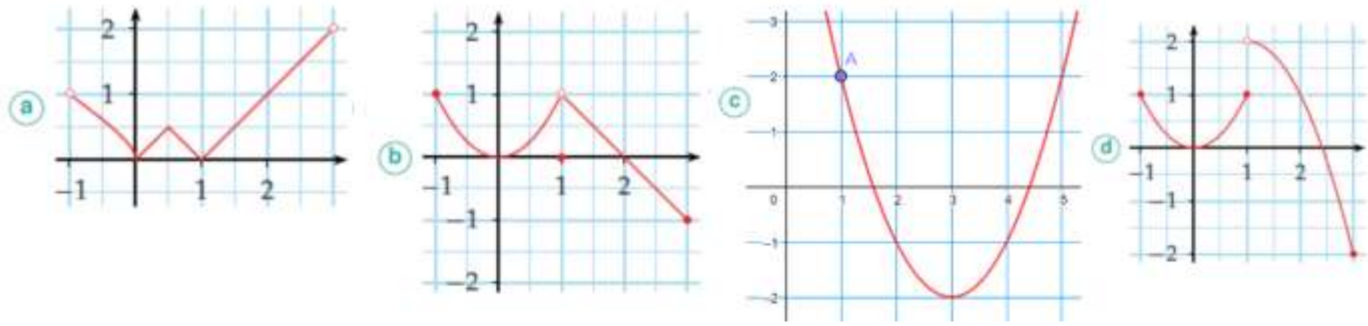
Nom : Prénom : Classe : $1^{ère}$	**INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES Nº5- modèle** **Eléments de correction**	
Thème : continuité		***calculatrice autorisée_45min***

EXERCICE 1 :

1. **a.** Parmi les 4 courbes ci-dessous, quelles sont celles qui représentent des fonctions continues en 1 ?



Ce sont les courbes (a) et (c).

b. Parmi les 4 courbes ci-dessus, quelles sont celles qui représentent des fonctions dérivables en 1

Les courbes (b) et (d) n'étant pas continues en 1, elles ne sont donc pas dérivables en 1.

La fonction (a) n'est pas dérivable en 1, car elle a des demi-tangentes à gauche et à droite de 1, qui ne sont pas les mêmes.

La fonction (c) est dérivable en 1, les demi-tangentes à gauche et à droite de 1 sont les mêmes, autrement dit la pente de la tangente semble continue en 1.

2. Soit la fonction f définie sur R par : $\begin{cases} f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x-1}}, x < 1 \\ f(x) = x - 1\,, x \geq 1 \end{cases}$

   a. Montrer que la fonction f est continue sur R.

   Sur $I =]-\infty, 1[$, la fonction est continue comme composée et produit de fonctions continues sur I.
   $(x \mapsto x^2, x \mapsto \frac{1}{x-1}\ et\ X \mapsto e^X)$
   Sur $J =]1; +\infty[$, la fonction est continue car il s'agit d'une fonction affine.
   $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x - 1 = 0^-$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$
   $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$ donc par produit $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 0$ et $f(1) = 0$
   Donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ donc la fonction est continue en 1.
   Conclusion : la fonction est donc continue sur R.

   b. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

   Pour $h < 0, \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 e^{\frac{1}{1+h-1}}}{h} = \frac{(1+2h+h^2)e^{\frac{1}{h}}}{h} = \frac{1}{h}e^{\frac{1}{h}} + 2e^{\frac{1}{h}} + he^{\frac{1}{h}}$

Or $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{1}{h} = -\infty\ or\ \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$ par croissance comparée, donc par composée $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{1}{h}e^{\frac{1}{h}} = 0$

$\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc par composée et produit $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} 2e^{\frac{1}{h}} = 0$ et par produit $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} he^{\frac{1}{h}} = 0$

Donc par somme $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$.

Pour $h > 0, \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h-1)-0}{h} = \frac{h}{h} = 1$

Puisque $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \neq \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ cela signifie que la fonction n'est pas dérivable en 1.

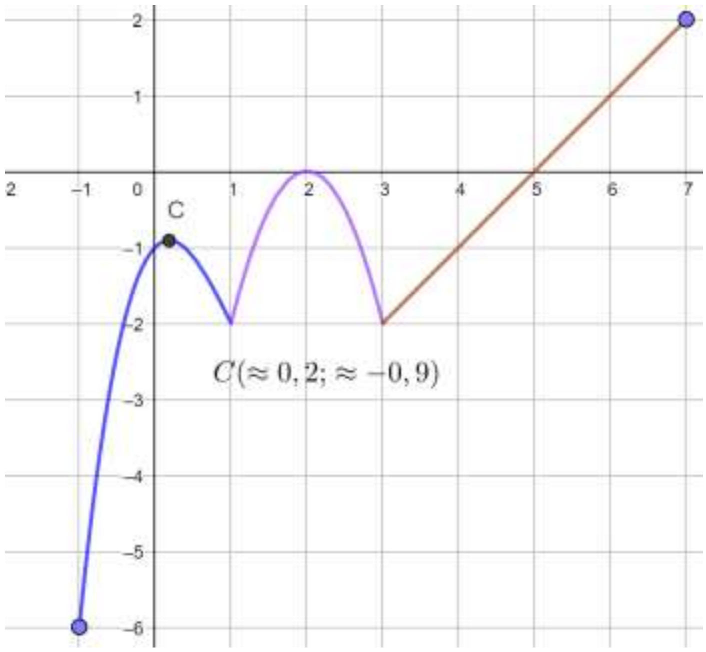
3. On donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur I=[-1 ;7].

a. Justifier par des arguments graphiques la continuité de f sur I.

Sur I, on peut tracer la courbe sans « lever le stylo »

Ce qui signifie que la fonction est continue sur I.

b. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$, selon les valeurs du réel k.



Pour $k \in]-\infty; -6[\cup]2; +\infty[, f(x) = k$ n'a pas de solution.

Pour $k \in [-6; -2], f(x) = k$ a 1 unique solution.

Pour $k = -2, f(x) = k$ a 3 solutions.

Pour $k \in]-2; \approx -0{,}9[, f(x) = k$ a 5 solutions

Pour $k \approx -0{,}9; f(x) = k$ a 4 solutions.

Pour $k \in]-0{,}9; 0[, f(x) = k$ a 3 solutions.

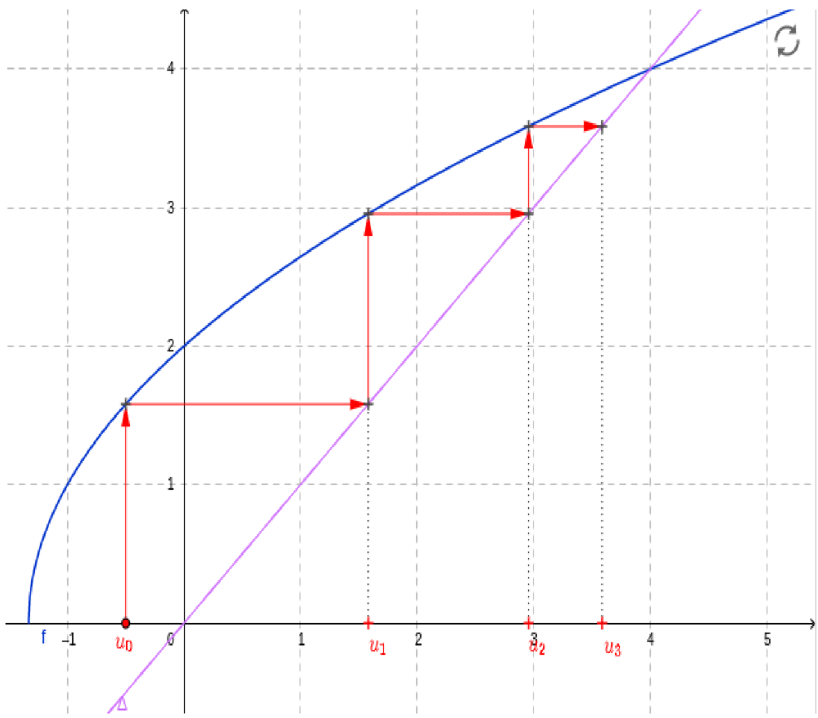
Pour $k = 0, f(x) = k$ a 2 solutions.

Pour $k \in]0; 2], f(x) = k$ a 1 solution.

<u>EXERCICE 2 :</u>

Soit (un) la suite définie par :$u_0 = -0{,}5$ et pour tout entier naturel n :$u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

1. On a tracé la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$ ci-après.
Construire **graphiquement** les 4 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses du graphique.
On laissera les traits de construction.



2.

a. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante, minorée par -1 et majorée par 5.

Soit $P(n)$: $\{-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5\}$
Initialisation : $u_1 = \sqrt{3 \times (-0{,}5) + 4} = \sqrt{2{,}5}$ on remarque que l'on a bien $-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 5$
$P(0)$ est donc vraie.
Hérédité : On suppose qu'il existe $k \in N$, tel que $P(k)$ vraie, c'est-à-dire $-1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 5$ et montrons que $P(k+1)$ est encore vraie, c'est-á-dire $-1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 5$

Méthode 1	**Méthode 2**
On suppose que : $-1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 5$ $-3 \leq 3u_k \leq 3u_{k+1} \leq 15$ $\times 3$ $1 \leq 3u_k + 4 \leq 3u_{k+1} + 4 \leq 19$ $+4$ $-1 \leq 1 \leq \sqrt{3u_k + 4} \leq \sqrt{3u_{k+1} + 4} \leq \sqrt{19} \leq 5$ on applique La fonction racine carrée qui est une fonction croissante sur R_+, donc les inégalités ne changent pas de sens. $-1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 5$ On a donc montré que $P(k+1)$ vraie.	f est croissante sur $[-1; 5\,]$ comme composée de fonctions croissantes sur $[-1; 5\,]$ et sur R_+ : $x \mapsto 3x + 4$ est une fonction affine croissante sur R donc sur $[-1\,; 5\,]$, à image dans $[1\,; \sqrt{19}]$. Or la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ est croissante sur R_+ donc sur $[1\,; \sqrt{19}]$. On suppose que : $-1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 5$ $f(-1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(5)$ f croissante sur [-1 ;5] $-1 \leq 1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \sqrt{19} \leq 5$ On a donc montré que $P(k+1)$ vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, on a montré que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in N$, soit (u_n) croissante et majorée par 5.

b. Montrer que la suite (un) est convergente et déterminer par **le calcul** sa limite.

- (u_n) est une suite croissante et majorée par 5, donc elle **converge** vers un réel l.
- $\forall\, n \in N, \boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$
- La fonction $\boldsymbol{f}$ **est continue** sur $[-\frac{4}{3}; +\infty[$ comme composée de fonctions continues (les mêmes que celles mentionnées dans la méthode 2, ci-dessus)

Donc d'après le **théorème du point fixe,** l est alors solution de l'équation $f(x) = x$.

$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{3x+4} = x \Leftrightarrow 3x + 4 = x^2 avec\ x \in [-\frac{4}{3}; +\infty[\cap R_+ = R_+$ (les deux membres de l'équation doivent être positifs)

$$3x + 4 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0,$ le trinôme a donc deux racines réelles distinctes.
$x_1 = \frac{3-5}{2} = -1\ et\ x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$
Compte-tenu des conditions des solutions de cette équation, seule la réponse 4 est possible, d'où $l = 4$.

EXERCICE 3 :

Le but de cet exercice est de trouver la ou les solutions sur $[0;+\infty[$ de l'équation $e^x=x+2$.

1. Soit $g: x \to e^x-x-2$

a) On factorise par e^x : $e^x-x-2=e^x(1-\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e^x})$ or :

- $\frac{x}{e^x}=\frac{1}{\frac{e^x}{x}}$ et d'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$.
- par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$, puis par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e^x}=1$
- enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

b) On dérive la fonction g : $g'(x)=e^x-1$ et $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$. On a donc :

	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	+
Variations de g	$-1 \nearrow +\infty$

c) La fonction g est une fonction continue sur $[0;+\infty[$ car somme d'une fonction exponentielle et d'une fonction polynomiale. De plus, on vient de montrer que cette fonction était strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et que $g(0)<0<\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

D'après le théorème de la bijection, on sait que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

d) Grâce à la calculatrice, on trouve que $1,14<\alpha<1,15$ car $f(1,14)<0$ et $f(1,15)>0$.

2. Répondre à la phrase d'introduction de cet exercice. $e^x=x+2 \Leftrightarrow e^x-x-2=0 \Leftrightarrow g(x)=0$

D'après la question 1, cette équation a une unique solution α sur $[0;+\infty[$.